

I Úvod do diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné

Než se pustíme do dalšího studia této problematiky, je třeba si zopakovat a případně připomenout některé zásadní pojmy z funkcionální analýzy, na kterých následně vystavíme teorii limitního počtu funkcí jedné proměnné. Jedná se o pojem funkce jako takový a pak také základní vlastnosti funkcí.

Dovolte mi zde nejprve malou historickou poznámku. Počátky diferenciálního počtu můžeme vystopovat již v prvních pracích G. W. von Leibnitze (1646 – 1716). Například v jeho díle „*Dissertatio de arte combinatoria*“, což do českého jazyka přeloženo znamená „*Rozprava o umění kombinatoriky*“. Toto pojednání sepsal ve svých dvaceti letech!!!

Touto problematikou se samozřejmě nezabýval jen Leibnitz. Téměř současně a naprosto nezávisle na něm vytvořil teorii diferenciálního a integrálního počtu také I. Newton (1643 – 1727). Dalším velmi významným matematikem 18. století byl L. Euler (1707 – 1783). Ten byl u zrodu dalších dvou v té době nových oborů matematiky, variačního počtu a diferenciální geometrie. Historie funkcionální analýzy, diferenciálního a integrálního počtu jde dále přes takové velikány dějin matematiky, jakými byli J.-L. Lagrange, P.-S. Laplace, J. B. J. Fourier, G. F. B. Riemann, K. F. J. Gauss a mnoho a mnoho dalších.

V následujících kapitolách se tedy ponoříme do hlubin problematiky diferenciálního a integrálního počtu a budeme zkoumat ten svět, který je svým způsobem zajímavý a často plný nečekaných zvratů a napínavých okamžiků. Protože se bude jednat o úvod, nebudou to hlubiny nikterak závratné. Spíše se budeme potápět několik metrů pod hladinou, ale i tak tento svět bude velmi zajímavý.

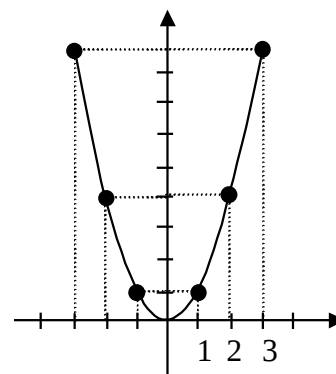
I.1 Pojem funkce a základní vlastnosti funkcí jedné proměnné

I.1.1 Vymezení pojmu funkce

Na střední škole i v předešlých dílech této série skript pro vyšší odborné školy jsme s pojmem funkce již pracovali. Zcela intuitivně můžeme říci, že funkce je nějaká závislost jedné proměnné na hodnotách druhé proměnné daná jistým předpisem. Říkáme pak, že „*y závisí na x*“ a nebo také „*hodnota y je funkcí argumentu x*“.

Toto vymezení pojmu funkce nám ale v dalším textu rozhodně stačit nebude a tak se pokusíme přesněji vymežit to, co chápeme v matematice jako funkci. Začneme ale příklady některých funkcí, které již velmi důvěrně známe.

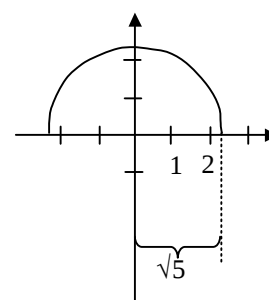
Mějme funkci $f: y = x^2$. Zvolíme-li libovolnou hodnotu proměnné x (říkáme jí také nezávisle proměnná, protože ji můžeme volit naprosto nezávisle jen s přihlédnutím na definiční obor dané funkce, pojem viz. dále), pak hodnotu proměnné y (říkáme jí také závisle proměnná, protože je její hodnota závislá na volbě proměnné x) získáme jako funkční hodnotu funkce f ve zvoleném bodě x , tj. $y = f(x)$. Tak například pro $x = 2$ bude mít y hodnotu $f(2) = 2^2 = 4$. Analogicky pro hodnotu $x = -3$ bude $y = f(-3) =$



Obrázek I.1.a

$= (-3)^2 = 9$. Pokud bychom vynesli postupně všechny funkční hodnoty funkce f patřící k volným hodnotám proměnné x do grafu, získali bychom parabolu (viz. obrázek I.1.a). Je zřejmé, že množina, ze které budeme moci hodnoty nezávisle proměnné x volit, budou všechna reálná čísla. Volba hodnot x nebude tedy ničím omezená. Všimněme si ještě jedné důležité věci. Každé hodnotě x z množiny všech reálných čísel přiřazuje funkce f právě jednu hodnotu $y = f(x)$. Zároveň však každé hodnotě $y = f(x)$, vyjma bodu $y = 0$, odpovídají v tomto případě právě dvě hodnoty x . Navíc množinu všech $y = f(x)$ tvoří všechna reálná čísla, nýbrž pouze jejich podmnožina, konkrétně interval $\langle 0; +\infty \rangle$. Tuto poznámku nezapomeňte, budeme ji potřebovat dále.

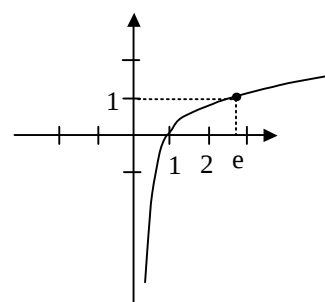
Podívejme se na jiný případ. Mějme funkci $g: y = \sqrt{5 - x^2}$. I zde pro zvolenou hodnotu proměnné x funkce g přiřazuje hodnotu $y = g(x)$. Tak například pro $x = 2$ bude hodnota funkce g rovna $y = \sqrt{5 - 2^2} = 1$. Je ale zřejmé, že zde nebudeme moci volit hodnotu nezávisle proměnné x zcela libovolně. Omezující bude v tomto případě výskyt odmocniny v předpisu funkce g . Z dřívějšího studia víme, že pod odmocninou (pohybujeme-li se nad tělesem reálných čísel) nesmí být číslo menší než nula. Tuto podmínku je možné zapsat ve tvaru: $5 - x^2 \geq 0$. Z toho vyplývá, že množina všech dosazovaných x do předpisu funkce g musí splňovat následující vztah: $|x| \leq 5$, což odpovídá intervalu $-5 \leq x \leq 5$. Hodnoty nezávisle proměnné x můžeme tedy volit libovolně, ovšem s přihlédnutím k výše definované podmínce. Je proto jasné, že hodnoty proměnné x mohou být všechna reálná čísla $x \in \langle -5; 5 \rangle$, což jistě není množina všech reálných čísel, nýbrž její podmnožina. Bystrý student jistě poznal, že funkce g v tomto případě popisuje polokružnici se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic (O, x, y) a s poloměrem $r = \sqrt{5}$



Obrázek I.1.b

(viz. obrázek 1.1.b). Obdobně jako v minulém případě si všimněme toho, že každé hodnotě $x \in \langle -5; 5 \rangle$ je přiřazena právě jedna hodnota $y = g(x)$ a také i zde platí, že jedné hodnotě $y = g(x)$, opět mimo případu, kdy se $y = 0$, odpovídají právě dvě hodnoty x . I tady množinou všech $y = g(x)$ nejsou všechna reálná čísla, ale jejich podmnožina, kterou můžeme zapsat intervalem $\langle 0; \sqrt{5} \rangle$.

Do třetice ještě jeden příklad. Mějme definovanou funkci $h: y = \ln x$. Pro zvolenou hodnotu nezávisle proměnné x funkce h přiřazuje vždy právě jednu hodnotu $y = h(x)$. Je zde ale omezení pro volbu neznámé x v podobě funkce přirozeného logaritmu. Z dřívějšíka víme, že přirozený logaritmus není definován pro záporná čísla a nulu. Pro volbu proměnné x platí tedy následující podmínka: $x > 0$. To znamená, že pro libovolné $x \in (0; +\infty)$ funkce h přiřazuje nějakou hodnotu $y = h(x)$. Tak například pro $x = 2$ je hodnota funkce h přibližně rovna $y = h(2) \approx 0,693$. Pro $x = e$ je pak $y = h(e) = 1$. Grafem funkce h bude logaritmická křivka na obrázku 1.1.c. Z ní je možné vyčíst, že množinou všech

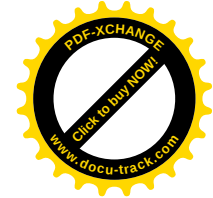
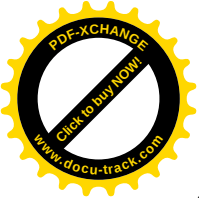


Obrázek 1.1.c

$y = h(x)$ budou všechna reálná čísla – na rozdíl od předcházejících dvou příkladů. Zřejmě každé hodnotě x z intervalu $(0; +\infty)$ je přiřazena právě jedna jediná hodnota $y = h(x)$ a zároveň každé hodnotě $y = h(x)$ odpovídá právě jedna jediná hodnota proměnné x . Funkce h je v tomto ohledu odlišná od předcházejících dvou a bude hrát v dalším textu důležitou roli!

Na předcházejících příkladech jsem chtěl přiblížit pojem funkce jaksí intuitivně. Nyní si jej definujeme přesně. Říkáme, že y je funkcí argumentu x právě tehdy, když každému prvku x z množiny $M \subseteq \mathbb{R}$ přiřadíme právě jeden prvek y z množiny $N \subseteq \mathbb{R}$.

Tuto skutečnost zapisujeme symbolicky $f: y = f(x)$. Zápis nám tedy říká, že jsme námi definovanou funkci pojmenovali f a symbol $f(x)$ značí funkční hodnotu funkce f v bodě x , tedy hodnotu y . Zkráceně pak říkáme, že se jedná o „funkci f “ a nebo také o „funkci $f(x)$ “. Znázornit graficky průběh funkce $f(x)$ není nic jiného, než vynést v kartézské soustavě souřadnic (O, x, y) všechny body, které mají souřadnice $[x; y = f(x)]$, kde $x \in M$ a $y \in N$. Pokud bychom dokázali vynést úplně všechny body o souřadnicích $[x; y = f(x)]$ (a tedy patřících uvažované funkci f), pak by graf tuto funkci jednoznačně definoval. Můžeme tedy říci, že množina všech bodů o souřadnicích $[x; y = f(x)]$, kde $x \in M$ a $y \in N$ zcela jednoznačně definuje funkci f . Bodů s výše zmiňovanou vlastností je však nekonečně mnoho (pohybujeme se v množině všech reálných čísel), a proto pomocí standardních pomůcek, jako jsou papír a tužka, jsme schopni vynést jen přibližnou aproximaci reálného průběhu funkce.



Ani počítače nám nedokáží vykreslit striktně spojitý graf, i když krok sousedních hodnot x , pro která můžeme vypočítat funkční hodnoty libovolné funkce, může být velmi malý (a je definovaný parametrem rozlišení monitoru případně jiného externího výstupního zařízení). Tím se ale přesnému grafu nějaké funkce dobře přiblížíme a dostáváme tak kvalitní aproximaci jejího grafu, stále to však není úplně přesné. To je třeba mít na paměti.

Pojďme dál. Množině M v definici pojmu funkce, kterou jsme nazvali funkcí f , říkáme definiční obor funkce a značíme symbolem D_f případně $D(f)$. Takže definiční obor libovolné funkce je vlastně množina všech hodnot nezávisle proměnné x , pro které má uvažovaná funkce smysl. Jsou to ty hodnoty x , které splňují podmínky vyčíslitelnosti předpisu uvažované funkce. Množině N pak říkáme obor hodnot právě definované funkce f a značíme symbolem H_f nebo $H(f)$. Je to tedy množina všech funkčních hodnot y libovolné funkce.

Z uvedených příkladů a z definice funkce vyplývá poměrně zásadní věc. Jedné hodnotě nezávisle proměnné x z definičního oboru libovolné funkce přiřazujeme vždy pouze jednu jedinou funkční hodnotu y . Ale jedné funkční hodnotě y nemusí vždy odpovídat pouze jedna hodnota nezávisle proměnné x (viz. první i druhý příklad)!!!

Z výše zmíněného také vyplývá i pojem rovnosti dvou (či více) funkcí. Abychom totiž jednoznačně definovali libovolnou funkci, musíme určit jednak předpis, kterým budeme hodnotám nezávisle proměnné x přiřazovat funkční hodnoty y a zadruhé musíme určit definiční obor této funkce.

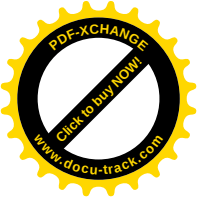
Aby se tedy dvě funkce f a g rovnaly, musí platit, že $D(f) = D(g)$ a zároveň pro všechna $x \in D(f) = D(g)$ musí platit $f(x) = g(x)$.

Jako ilustraci použijeme zaprvé funkci $f: y = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$ a za druhé funkci $g: y = x^2$, $D(g) = \mathbb{Z}$. Ačkoliv mají obě funkce stejný předpis (pravidlo, kterým se každému x z definičního oboru té které funkce přiřazuje funkční hodnota y), nejsou tyto funkce stejné! Liší se totiž v definičním oboru. Tím se také budou lišit grafy obou funkcí. Zatímco grafem funkce f bude spojitá křivka, kterou nazýváme parabola, grafem funkce g budou pouze body $[x; y = x^2]$, kde $x \in \mathbb{Z}$ a $y \in \mathbb{N}_0$.

I.I.II Monotónnost funkce

Mějme funkci $f: y = f(x)$, která je definovaná na jistém intervalu $I \subseteq D(f)$, který může být omezený nebo neomezený, také uzavřený, otevřený či polouzavřený.

Říkáme, že funkce f je funkcí rostoucí na intervalu I právě tehdy, když pro libovolná dvě čísla $x_1, x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, platí $f(x_1) < f(x_2)$.



Jinými slovy to znamená, že pokud je funkce f rostoucí, pak se zvětšujícím se argumentem $x \in I$ rostou také funkční hodnoty $y = f(x)$. Příkladem rostoucí funkce je $f: y = 2^x$. Tato funkce je dokonce funkcí rostoucí na celém svém definičním oboru, tj. interval $I = D(f)$!

Nechť existuje funkce $g: y = g(x)$, která je definovaná na jistém intervalu $J \subseteq D(g)$, který opět může být omezený, neomezený, uzavřený, otevřený či polouzavřený.

Říkáme, že funkce g je funkcí klesající na intervalu J právě tehdy, když pro libovolná dvě čísla $x_1, x_2 \in J$ taková, že $x_1 < x_2$, platí $g(x_1) > g(x_2)$. Pro klesající funkci g proto platí, že se vzrůstající hodnotou argumentu $x \in J$ klesají její funkční hodnoty $y = g(x)$.

Pro ilustraci pojmu klesající funkce se podívejme na funkci $g: y = x^2$. Její graf je na obrázku 1.1.a. Funkce g je klesající na intervalu $J = (-\infty; 0) \in D(g)$. Na jiném intervalu $I = (0; \infty) \in D(g)$ je funkce g rostoucí (viz. definice rostoucí funkce).

Obě definice je možné ještě zobecnit. Nahraďme v definici rostoucí funkce na intervalu I nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$ nerovností $f(x_1) \leq f(x_2)$ a dostáváme tak definici funkce neklesající. Podobně v definici funkce klesající na intervalu J nahraďme nerovnost $g(x_1) > g(x_2)$ nerovností $g(x_1) \geq g(x_2)$ a dostaneme tak definici funkce nerostoucí.

Pokud o nějaké libovolné funkci řekneme, že je na intervalu I monotónní, znamená to pro nás, že je buď na intervalu I funkcí klesající nebo rostoucí případně neklesající či nerostoucí. Pokud je uvažovaná funkce rostoucí nebo klesající, pak takovou funkci nazveme ryze monotónní na intervalu I .

Z toho vyplývá několik významných důsledků. Je-li nějaká funkce na intervalu I rostoucí, je také jistě funkcí neklesající. Je-li ale uvažovaná funkce na intervalu I neklesající, pak to neznamená, že by byla na tomto intervalu rostoucí! A podobně je tomu i v případě funkce klesající a nerostoucí!!!

Podívejme se ještě jednou na graf funkce $g: y = x^2$, který je naznačen na obrázku 1.1.a. Ptáme se nyní, jaká je funkce g z hlediska monotónnosti na intervalu $I = (-1; 2)$. Na tomto intervalu totiž mění funkce g svoji monotónnost a není možné o ní rozhodnout. Příklad můžeme také zobecnit: Pokud dochází na libovolném intervalu I , který je podmnožinou definičního oboru libovolné funkce, ke změně její monotónnosti, říkáme, že tato funkce není ani rostoucí, ani klesající, ani nerostoucí a ani neklesající! Takovou funkci pak označíme jako funkcí nemonotónní.

Ještě na závěr kapitoly týkající se monotónnosti funkce dvě poznámky. Je-li libovolná funkce na intervalu I rostoucí, pak je rostoucí i na všech intervalech, které jsou částí intervalu I . Stejně je tomu i v případě klesající, nerostoucí a neklesající funkce na intervalu I .

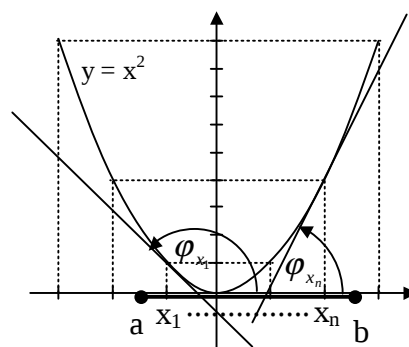
Z monotónie uspořádanosti na množině všech reálných čísel také vyplývá to, že pokud je funkce $f: y = f(x)$ rostoucí na intervalu I , pak je funkce $g: y = c \cdot f(x)$ rostoucí pro $c > 0$ a pro $c < 0$ je funkce g klesající.

I.I.III Funkce konkávní a konvexní

Dalším z vlastností, kterou u funkcí zjišťujeme je, zda zkoumaná funkce je konkávní a nebo konvexní. V tuto chvíli ještě nemáme definovaný matematický aparát, kterým bychom jednoznačně definovali tyto vlastnosti. Proto se k tématu vrátíme ještě jednou v kapitole týkající se vyšetřování průběhů funkcí ve chvíli, kdy již budeme mít k dispozici derivace.

Přesto však bych zde rád uvedl příklady funkcí, na kterých bych chtěl demonstrovat konkávnost a konvexnost.

Podívejme se nyní na funkci $f: y = x^2$. Graf funkce je znázorněn na obrázku I.I.III.a. Zvolíme-li n libovolných hodnot x_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ z nějakého intervalu $I = \langle a; b \rangle \subseteq D(f)$ takových, že $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ a $n \geq 2$, pak funkci f nazveme konvexní na intervalu I právě tehdy, když bude platit, že $\tan \varphi_{x_1} \leq \tan \varphi_{x_2} \leq \dots \leq \tan \varphi_{x_n}$, kde φ_{x_i} jsou úhly, které svírají tečny ke grafu funkce f v bodech x_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ s kladnou částí osy x kartézské soustavy souřadnic (O, x, y) . Funkce f je funkcí konvexní na intervalu $I = \langle a; b \rangle$, protože výše zmíněnou podmínku pro libovolný počet bodů tohoto intervalu bezesbýtku splňuje. Dokonce je tato funkce konvexní na celém $D(f)$!!! Nicméně je zřejmé, že tato definice je poměrně laxní. Vymezuje sice pojem konvexnosti na intervalu, ale nic neříká o tom, kdy je daná funkce konvexní v obecném bodě z definičního oboru zkoumané funkce případně v obecném bodě intervalu I .

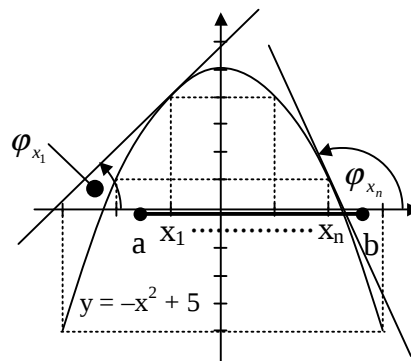


Obrázek I.I.III.a

Přesnější vymezení pojmu konvexnosti může být toto. Říkáme, že funkce f je konvexní na intervalu I právě tehdy, když pro každý bod x_0 intervalu I jsou všechny body $[x; y = f(x)]$ nad tečnou ke grafu funkce f v bodě $[x_0; y = f(x_0)]$. I zde však zatím chybí zásadní předpoklad, že totiž zkoumaná funkce má na intervalu I derivaci! Proto se konvexností i konkávností budeme hlouběji zabývat až budeme mít definované derivace a prstencové okolí bodu a budeme tak moci těchto pojmů využít ve výpočtech.

Abychom nechodili daleko, rozeberme si nyní funkci $g: y = -x^2 + 5$, jejíž graf je na obrázku I.I.III.b. Opět zvolme postupně n libovolných bodů x_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ z nějakého intervalu $J = \langle a; b \rangle \subseteq D(f)$ s vlastností, že $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ a $n \geq 2$. Funkci g nazveme konkávní na intervalu J právě tehdy, když bude platit, že

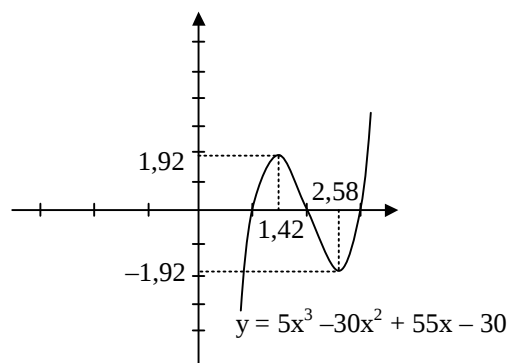
$\tan \varphi_{x_1} \geq \tan \varphi_{x_2} \geq L \geq \tan \varphi_{x_n}$, kde φ_{x_i} jsou úhly, které svírají tečny ke grafu funkce g v bodech x_i pro $i = 1, 2, \dots, n$ s kladnou částí osy x kartézské soustavy souřadnic (O, x, y) . Funkce g je funkcí konkávní na intervalu $J = \langle a; b \rangle$, protože výše zmíněnou podmínku pro libovolný počet bodů tohoto intervalu zcela bezesbýtku splňuje. A opět je tato funkce konkávní na celém $D(g)$!!! Tato definice má stejnou vadu na kráse jako ta přecházející. Přesněji pak můžeme definovat konkávnost následujícím způsobem. Říkáme, že funkce g je konkávní na intervalu J právě tehdy, když pro každý bod x_0 intervalu J jsou všechny body $[x; y = g(x)]$ pod tečnou ke grafu funkce g v bodě $[x_0; y = g(x_0)]$. Také tady zatím chybí zásadní předpoklad existence derivace funkce g na intervalu J !



Obrázek I.I.III.b

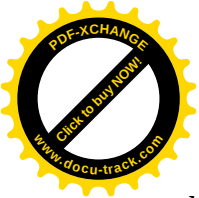
V obou předcházejících odstavcích pracujeme s oboustranně uzavřenými intervaly I a J . Takže předpoklad existence derivace funkcí f a g v každém z vnitřních bodů patřičných intervalů je třeba ještě rozšířit ještě o existenci derivace zprava v levých krajních bodech a o existenci derivace zleva v pravých krajních bodech obou intervalů. Pokud bychom tuto podmínku neuvažovali, museli bychom do definic konvexní a konkávní funkce vzít intervaly I a J oboustranně otevřené!!!

Do třetice mějme tuto funkce h : $y = 5x^3 - 30x^2 + 55x - 30$. Jedná se o racionální funkci třetího stupně jejímž grafem je kubická parabola. Kořeny jsou postupně čísla 1, 2 a 3 a rozklad na kořenové činitele je následující: $5(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Graf funkce h je na obrázku I.I.III.c. Vlastnosti řečené v obou posledních definicích jsou splněny postupně na intervalech $(-\infty; 2)$ a $(2; \infty)$. To znamená, že na intervalu $(-\infty; 2)$ je funkce h konkávní a na intervalu $(2; \infty)$ je funkce h konvexní. Je zřejmé, že kdybychom zvolili zájmový interval například $(1,42; 2,58)$, pak daná funkce nebude ani konkávní ani konvexní protože v bodě $x = 2$ se konkávní průběh funkce h mění na konvexní. Takovým bodům s touto vlastností říkáme inflexní body!



Obrázek I.I.III.c

Problematikou určování inflexních bodů se budeme zabývat až v kapitolách věnovaných průběhu funkcí a to proto, že k tomu potřebujeme znalost limit a derivací a s nimi spojených vět. Tam také odstraníme nedostatečnost výše uvedených definic konvexnosti a



konkávnosti funkcí a rozlišíme si pojmy ryze konkávní funkce od funkce konkávní a ryze konvexní funkce od funkce konvexní.

I.I.IV Sudost a lichost funkce

Říkáme, že funkce f je funkcí lichou právě tehdy, když je definiční obor funkce f souměrný podle počátku (tj. pro každou hodnotu $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$) a zároveň pro libovolnou hodnotu x z $D(f)$ platí: $f(-x) = -f(x)$. Podívejme se na příklad funkce $f: y = \sin x$. Aby byla funkce f lichá, muselo by platit, že $\sin(-x) = -\sin x$. Zřejmě platí $\sin(-x) = \sin(x - 2x)$. Takže pomocí součtových vzorců dostáváme:

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= \sin(x - 2x) = \sin x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot \sin 2x \\ &= \sin x \cdot \cos 2x - \cos x \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \\ &= \sin x (\cos 2x - 2\cos^2 x) = \\ &= \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x - 2\cos^2 x) = \\ &= \sin x (-\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin x [(-1)(\sin^2 x + \cos^2 x)] = \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

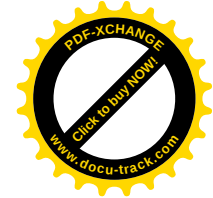
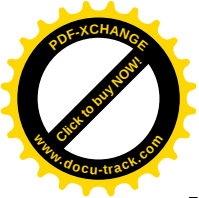
Tím jsme dokázali, že funkce $f: y = \sin x$ je funkcí lichou. Graf funkce $\sin x$ nebudu zde uvádět s odvoláním na skripta Matematika 10, R. Hampl, VOŠ a SPŠ Varnsdorf, 2005. Pilný student si provede důkaz i pro jiné liché funkce jako například pro funkci $y = x^3$, apod.

Je-li funkce f lichá, pak říkáme, že její graf je souměrný podle počátku kartézské souřadné soustavy (O, x, y) .

Kromě funkcí lichých rozlišujeme také funkce sudé. Funkce g je funkcí sudou právě tehdy, když je definiční obor funkce g souměrný podle počátku (tj. pro každou hodnotu $x \in D(g)$ je také $-x \in D(g)$) a zároveň pro libovolnou hodnotu x z $D(g)$ platí: $g(-x) = g(x)$. Mějme funkci $g: y = \cos x$. Předpokládejme, že funkce g je sudá a dokažme to. Aby byla funkce g sudá, musí platit, že $\cos(-x) = \cos x$, kdy $\cos(-x)$ můžeme přepsat také jako $\cos(x - 2x)$. Takže dostáváme s použitím součtových vzorců:

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x - 2x) = \cos x \cdot \cos 2x + \sin x \cdot \sin 2x \\ &= \cos x \cdot \cos 2x + \sin x \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \\ &= \cos x (\cos 2x + 2\sin^2 x) = \\ &= \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x) = \\ &= \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \\ &= \cos x\end{aligned}$$

Opět jsme dokázali, že tentokrát funkce $g: y = \cos x$ je funkcí sudou. Graf funkce $\cos x$ zde také nebudu uvádět s odvoláním na skripta „Matematika 10“, Ing. R. Hampl, VOŠ a SPŠ



Varnsdorf, 2005. Pilný student si také provede důkaz i pro jiné sudé funkce jako například pro funkci $y = x^4$, apod.

Je-li funkce g sudá, pak říkáme, že její graf je souměrný podle osy y kartézské souřadné soustavy (O, x, y) .

I.I.V Extrémy funkce

Sledujeme-li průběh funkce, zajímá nás také, v jakých bodech dosahuje extrémních funkčních hodnot. To znamená, že hledáme takové body x z definičního oboru sledované funkce, ve kterých dosahuje maximálních, respektive minimálních funkčních hodnot. Takovým bodům pak říkáme v matematice extrémy funkce. Nyní si rozebereme podmínky pro existenci bodů s extrémními funkčními hodnotami a v kapitolách věnovaných průběhu funkcí se pak na tuto problematiku podíváme zevrubněji a ukážeme si výpočetní aparát vhodný právě pro výpočet extrémů funkce.

Mějme danou funkci f , která je definovaná na jistém intervalu $(a; b)$, kde čísla a, b patří do množiny všech reálných čísel (pozor, jedná se o oboustranně otevřený interval, takže čísla a a b nemusí nutně patřit do definičního oboru funkce f !!). Dále předpokládejme, že existuje číslo x_0 takové, že $x_0 \in (a; b)$ a tedy také $x_0 \in D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 lokální maximum právě tehdy, když existuje reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechny hodnoty nezávisle proměnné $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ je $f(x) \leq f(x_0)$. Pokud můžeme zvolit reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechny hodnoty nezávisle proměnné $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ je dokonce $f(x) < f(x_0)$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 ostré lokální maximum. Interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ nazýváme v matematice δ -okolím bodu x_0 a budeme si o něm říkat více v kapitolách věnovaných limitám funkce jedné proměnné.

Kromě lokálního maxima mohou mít funkce také lokální minimum. Mějme nyní danou funkci g , která je definovaná na jistém intervalu $(a; b)$, kde čísla a, b patří opět do množiny všech reálných čísel. I zde předpokládejme, že existuje číslo x_0 takové, že $x_0 \in (a; b)$ a tedy také $x_0 \in D(g)$. Říkáme, že funkce g má v bodě x_0 lokální minimum právě tehdy, když existuje reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechny hodnoty nezávisle proměnné $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ je $g(x) \geq g(x_0)$. Pokud můžeme zvolit reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechny hodnoty nezávisle proměnné $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ je dokonce $g(x) > g(x_0)$, pak říkáme, že funkce g má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

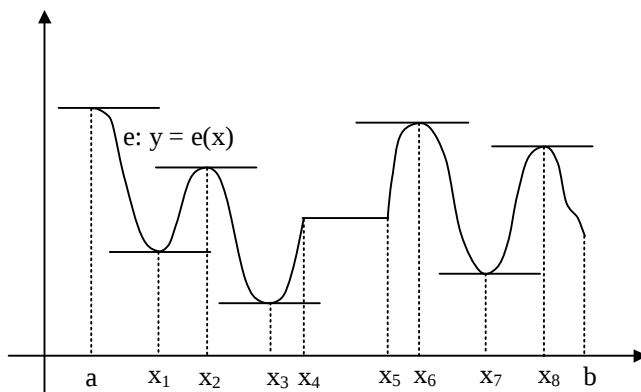
Lokálním maximum a lokálním minimum funkce říkáme souhrnným názvem lokální extrémy.

Rozšířme nyní oboustranně otevřený interval $(a; b)$ v definicích lokálních extrémů funkce o krajní body a a b . Dostáváme tak oboustranně uzavřený interval $\langle a; b \rangle$. A nyní mějme funkci h , která je definována na tomto intervalu. Má-li funkce h v bodě $x_0 \in \langle a; b \rangle$ největší funkční hodnotu ze všech funkčních hodnot, kterých funkce h na intervalu $\langle a; b \rangle$ nabývá, je bod x_0 buď lokálním maximum funkce h na intervalu $\langle a; b \rangle$ a nebo je krajním bodem intervalu $\langle a; b \rangle$, tj. $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$. Obdobně, má-li funkce h v bodě $x_0 \in \langle a; b \rangle$ nejmenší funkční hodnotu ze všech funkčních hodnot, kterých funkce h na intervalu $\langle a; b \rangle$ nabývá, je bod x_0 buď lokálním minimum funkce h na intervalu $\langle a; b \rangle$ a nebo je krajním bodem intervalu $\langle a; b \rangle$, tj. $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$.

Důkaz pro lokální maximum provedeme takto: „Není-li bod x_0 krajním bodem intervalu $\langle a; b \rangle$, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset \langle a; b \rangle$. Potom je však podle předpokladu $h(x) \leq h(x_0)$ pro všechna $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ a to znamená, že funkce h má v bodě x_0 lokální maximum. Podobně pro lokální minimum.“ Důkaz je citován z knihy „Úvod do počtu diferenciálního“, Prof. Dr. V. Jarník, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1946, str. 287.

Z definic lokálních extrémů také vyplývá, že aby měla nějaká funkce v bodě x_0 lokální extrém, musí být právě bod x_0 vnitřním bodem zájmového intervalu $\langle a; b \rangle$! Nesmí to být jeden z jeho krajních bodů. Kdyby daná funkce nabývala své extrémální funkční hodnoty v jednom z krajních bodů zájmového intervalu, tj. v bodě $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$, nemůže být tento bod považován za lokální extrém protože neexistuje žádný oboustranně otevřený interval (viz. definice lokálních extrémů), v němž by bod a nebo b byl jeho vnitřním bodem!

Pro ilustraci se nyní podívejme na obrázek I.I.V.a. Na něm je graf funkce $e: y = e(x)$, která je definovaná na intervalu $\langle a; b \rangle$. V bodech x_2, x_6 a x_8 má funkce e ostrá lokální maxima, zatímco v bodech x_1, x_3 a x_7 má funkce e ostrá lokální minima. Kromě toho má funkce e lokální maxima – ale neostrá! – na intervalu $\langle x_4; x_5 \rangle$ a zároveň lokální minima – opět neostrá! – na intervalu $(x_4; x_5)$. Takže ve všech bodech intervalu $(x_4; x_5)$ má funkce e neostrá lokální maxima a zároveň minima! Bod x_4 je neostrým lokálním maximum a bod x_5 je neostrým lokálním minimum.



Obrázek I.I.V.a

Největší funkční hodnoty dosahuje funkce e v bodě a , ale tento bod není možné považovat za lokální maximum, protože neexistuje žádný otevřený interval (viz. definice lokálních extrémů), který by byl podmnožinou definičního oboru funkce e a pro který by byl bod a jeho vnitřním bodem! Uvědomme si, že definiční obor funkce e je vlastně interval $\langle a; b \rangle$!

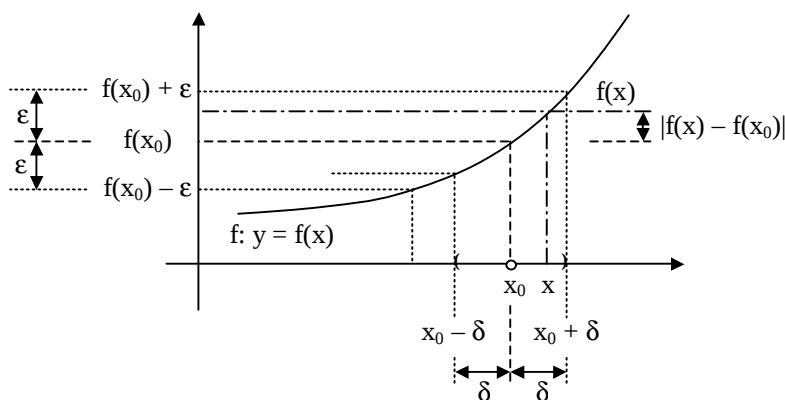
I.I.VI Spojitost funkce

Pojem spojitosti funkce jistě umožňuje zcela intuitivní představu, že se jedná o funkci, jejíž průběh je spojitý, tj. funkce na daném intervalu probíhá bez přerušení. Pro průběh funkce to tedy znamená, že v žádném bodě zkoumaného intervalu (může jím být i celý definiční obor zkoumané funkce) nedochází k ostrému zlomu (ostré změně funkčních hodnot) této funkce. Ale v matematice si s touto představou spojitosti funkce nevystačíme. Je třeba pojem definovat nade vší pochybnost.

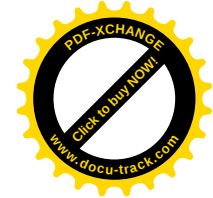
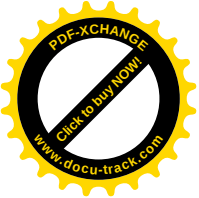
Pro nás, jednoduše řečeno, bude pojem spojitosti funkce $f: y = f(x)$ v bodě $x = x_0$ znamenat, to, že změníme-li o málo hodnotu nezávisle proměnné x , bude se velmi málo lišit funkční hodnota $y = f(x)$ od hodnoty $y = f(x_0)$. Hovoříme zde o „velmi malé“ změně jak hodnot argumentu funkce f tak funkčních hodnot $y = f(x)$. Co ale „velmi malou“ změnou těchto hodnot rozumíme? Podívejme se na obrázek I.I.VI.a.

Zvolíme libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$. K číslu ε můžeme najít okolo bodu x_0 interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, kde $\delta > 0$ takový, že pro libovolnou hodnotu $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ se bude funkční hodnota $f(x)$ od funkční hodnoty $f(x_0)$ lišit o méně než námi zvolené číslo ε . To znamená, že bude platit nerovnost: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

A právě ony hodnoty ε a δ nám vymezují význam slovního spojení „velmi malé“ změny. Je zřejmé, že ke každému zvolenému $\varepsilon > 0$, byť sebemenšímu, je vždy možné nalézt číslo $\delta > 0$. Navíc velikost čísla δ bude vždy záviset na volbě čísla ε . Budeme-li sledovat děje na úrovni mezigalaktických pozorování, budou pro nás dostatečně malou změnou hodnoty čísel ε a δ ve velikostech 10^3 km. Naopak budeme-li se



Obrázek I.I.VI.a



pohybovat ve struktuře atomu, začnou pro nás být zajímavé velikosti čísel ε a δ na úrovni 10^{-10} metru.

Takže definice spojitosti bude vycházet z právě řečeného: říkáme, že funkce $f: y = f(x)$ je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ takové, že pro všechny hodnoty $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ platí nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Je zřejmé, že aby byla funkce $f: y = f(x)$ spojitá v bodě x_0 , musí být nutně definována na nějakém otevřeném intervalu, jehož je bod x_0 vnitřním bodem!

Ovšem pozor, v definici se nemluví nic o tom, že funkce f musí být nutně definována také přímo v bodě x_0 . Je-li v bodě x_0 definována, pak nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ je zcela nepochybně splněna, protože $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Ale smysl definice spojitosti se nezmění, pokud budeme uvažovat všechna $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$. Takže definici můžeme přepsat i následujícím způsobem: říkáme, že funkce $f: y = f(x)$ je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ takové, že pro všechny hodnoty $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ platí nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

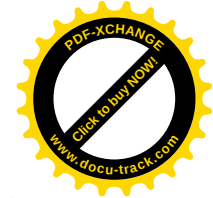
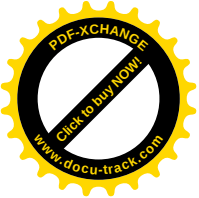
Mějme nyní dvě libovolné funkce $f: y = f(x)$ a $g: y = g(x)$, pro které na intervalu $(a; b)$ platí, že $f(x) = g(x)$. Mimo interval $(a; b)$ se mohou funkční hodnoty obou funkcí lišit. Chtěl bych nyní ukázat, že pokud je funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in (a; b)$ spojitá, pak je i funkce $g(x)$ v tomtéž bodě x_0 spojitá.

Důkaz je následující: pokud je funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x_0 \in (a; b)$, musí existovat ke každému $\varepsilon > 0$ nějaké číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ bude platit nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Tolik říká definice spojitosti funkce $f(x)$ v bodě x_0 . Zmenšíme-li číslo ε tak, že k němu nalezené číslo δ nám bude vymezovat interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset (a; b)$, nebude to nikterak definici spojitosti funkce $f(x)$ odporovat. Potom ale bude jistě platit, že $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ (předpokládáme, totiž, že na $(a; b)$ platí $f(x) = g(x)$) a proto funkce $g(x)$ je také v bodě $x_0 \in (a; b)$ spojitá.

Nyní si zde uvedeme dvě obecné věty o spojitosti funkcí v bodě x_0 . První se bude týkat spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí a druhá pak spojitosti funkce složené.

Mějme dvě libovolné funkce $f: y = f(x)$ a $g: y = g(x)$, které jsou v bodě x_0 spojité. Potom také funkce $|f(x)|$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou spojitě v bodě x_0 a navíc platí-li, že $g(x_0) \neq 0$, je i funkce $f(x) / g(x)$ spojitá.

Důkaz si nyní ukážeme pro funkci $|f(x)|$. Z definice spojitosti vyplývá, že aby byla funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0 , můžeme k libovolnému $\varepsilon > 0$ najít $\delta > 0$ takové, že pro



jakékoliv $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ bude nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ splněna. Podívejme se, jakých hodnot za těchto předpokladů (vycházejících z definice spojitosti funkce $f(x)$ v bodě x_0) nabývá výraz $||f(x)| - |f(x_0)||$. Pokud $f(x_0)$ bude kladné, pak bude kladné i $f(x)$ (hodnotu čísla $\varepsilon > 0$ mohu volit tak, aby číslo $\delta > 0$ vymezovalo interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, na kterém, pro libovolné x z tohoto intervalu, bude $f(x)$ také kladné). Výraz bude možno upravit do tvaru $|f(x) - f(x_0)|$ a jeho hodnota bude jistě menší, než námi zvolené číslo ε , neboť se jedná přímo o podmínku spojitosti funkce $f(x)$. Podívejme se ještě na možnost, že by $f(x_0)$ bylo číslo záporné. Pak i $f(x)$ bude mít zápornou hodnotu a platí $||f(x)| - |f(x_0)|| = |-f(x) - [-f(x_0)]| = |-f(x) + f(x_0)| = |-[f(x) - f(x_0)]|$. Pro absolutní hodnotu libovolného reálného čísla a platí, že $|a| = |-a|$ a proto také $|-[f(x) - f(x_0)]| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Mějme nyní $f(x_0) = 0$. Z definice spojitosti také vyplývá, že aby byla funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitá jestliže že $f(x_0) = 0$, pak ke zvolenému číslu $\varepsilon > 0$, můžeme najít číslo $\delta > 0$ s tou vlastností, že pro libovolné $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ bude splněna nerovnost $|f(x)| < \varepsilon$. Podívejme se nyní jak vypadá výraz $||f(x)| - |f(x_0)||$ pro $f(x_0) = 0$. V tomto případě mohou nastat dvě situace, jednak $f(x) \geq 0$ a zadruhé $f(x) < 0$. Podívejme se na první z nich: $||f(x)| - |f(x_0)|| = ||f(x)|| = |f(x)| < \varepsilon$ (což jest opět podmínka spojitosti funkce $f(x)$ v bodě x_0 , kde $f(x_0) = 0$). Druhá možnost vypadá takto: $||f(x)| - |f(x_0)|| = ||f(x)|| = |-f(x)|$. Protože pro absolutní hodnotu libovolného reálného čísla a platí, že $|a| = |-a|$, bude i $|-f(x)| = |f(x)| < \varepsilon$. A tím je důkaz hotov.

Dokážeme si ještě spojitost funkce $f(x) + g(x)$. Zvolme pro funkci $f(x) + g(x)$ libovolné $\varepsilon > 0$. A také pro funkci $f(x)$ číslo $\varepsilon_1 = \varepsilon / 2$ a pro funkci $g(x)$ číslo $\varepsilon_2 = \varepsilon / 2$ (nic nám v tom nebrání). Ze spojitosti funkce $f(x)$ vyplývá, že k číslu ε_1 bude existovat číslo $\delta_1 > 0$ takové, že pro libovolné $x \in (x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)$ bude $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1$. Totéž pro funkci $g(x)$, totiž, že k číslu ε_2 bude existovat číslo $\delta_2 > 0$ takové, že pro libovolné $x \in (x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)$ bude $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2$. Potom ale pro číslo $\delta = \min(\delta_1; \delta_2) > 0$ platí: pro libovolné $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ bude: $|[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Protože ale $|[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]| \leq |[f(x) - f(x_0)]| + |[g(x) - g(x_0)]|$ a $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, bude také $|[f(x) - f(x_0)]| + |[g(x) - g(x_0)]| < \varepsilon$. Toto je však podmínka pro spojitost funkce $f(x) + g(x)$. Tím je důkaz hotov. Další důkazy nechám na pilném studentovi.

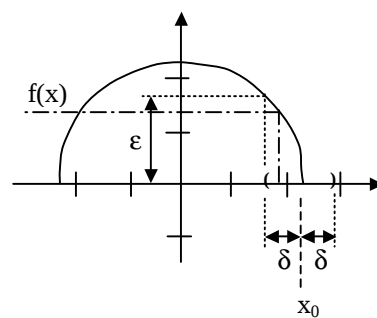
Druhou obecnou větou o spojitosti bude věta, která se bude týkat funkcí složených. Mějme funkci $g: y = g(x)$ spojitou v bodě x_0 . Dále mějme funkci $f: z = f(y)$ spojitou v bodě $y_0 = g(x_0)$. Potom složená funkce $f(g(x))$ je také spojitá v bodě x_0 .

Provedeme důkaz. Zvolme nyní číslo $\varepsilon > 0$. A nyní musíme zjistit, jestli existuje k námi zvolenému číslu ε číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechny $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ platí nerovnost $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$.

Podle definice čísla y_0 je možné psát $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$. Protože je funkce $f(y)$ v bodě y_0 spojitá, můžeme pro libovolná $y \in (y_0 - \alpha; y_0 + \alpha)$ psát $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Protože je i funkce $g(x)$ podle předpokladu spojitá v bodě x_0 , existuje ke každému $\alpha > 0$, které jsme právě dostali, číslo $\delta > 0$ takové, že pro všechny $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ můžeme psát $|g(x) - g(x_0)| < \alpha$, nebo-li $|g(x) - y_0| < \alpha$. Mějme tedy libovolné číslo $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Potom bude platit $|g(x) - y_0| < \alpha$ a tedy bude platit $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$ a tedy $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$ tím je věta dokázána, protože ono hledané číslo $\delta > 0$ jsme nakonec našli!

Ted' se podívejme ještě jednou na funkci $f: y = \sqrt{5-x^2}$ a na její graf. Je na obrázku 1.1.b ale my si jej ještě jednou (a pro nás nyní vhodněji) překreslíme na obrázku 1.1.VI.b.

definičním obore této funkce je jistě interval $\langle -\sqrt{5}; \sqrt{5} \rangle$. Na tomto intervalu je funkce f definována a navíc v každém bodě oboustranně otevřeného intervalu $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ je funkce f i spojitá. Podívejme se ale na případ, kdy $x_0 = \sqrt{5}$, který leží v definičním oboru funkce $f(x)$. Podle definice spojitosti funkce $f(x)$ zvolme jisté $\varepsilon > 0$. K němu není problém najít číslo $\delta > 0$.

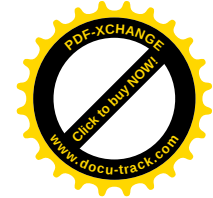
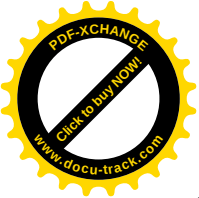


Obrázek 1.1.VI.b

Ale s další částí definice spojitosti bude zádrhel. Sama definice bude splněna na intervalu $(\sqrt{5} - \delta; \sqrt{5})$, tím spíše pak na intervalu $(\sqrt{5} - \delta; \sqrt{5})$. A určitě splněna nebude (a ani nemůže být) pro interval $(\sqrt{5}; \sqrt{5} + \delta)$ protože tento interval již není podmnožinou definičního oboru zkoumané funkce $f(x)$. Je vidět, že si zde s dosavadní definicí spojitosti v bodě x_0 nevystačíme. Ale přeci jen je zřejmé, že funkce $f(x)$ bude v bodě x_0 nějakým způsobem spojitá. Abychom mohli postihnout i tyto případy, zavádíme pojem spojitosti zprava a spojitosti zleva v bodě x_0 .

Říkáme, že funkce $f: y = f(x)$ je spojitá v bodě x_0 zprava právě tehdy, když ke každému zvolenému číslu $\varepsilon > 0$ můžeme najít číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu nezávisle proměnné $x \in \langle x_0; x_0 + \delta \rangle$ platí nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Podobně definujeme spojitost funkce zleva. Říkáme, že funkce $f: y = f(x)$ je spojitá v bodě x_0 zleva právě tehdy, když ke každému zvolenému číslu $\varepsilon > 0$ můžeme najít číslo



$\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu nezávisle proměnné $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ platí nerovnost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

A stejně jako v definici spojitosti i zde můžeme bez jakéhokoliv vlivu nahradit interval $\langle x_0; x_0 + \delta \rangle$ intervalem $(x_0; x_0 + \delta)$ a interval $(x_0 - \delta; x_0)$ intervalem $(x_0 - \delta; x_0)$. Smysl obou definic se nezmění! Opět, je-li na $\langle x_0; b \rangle$, kde číslo $b > x_0$, pro všechna x z tohoto intervalu platná rovnost $f(x) = g(x)$ a zároveň je funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitá zprava, je také funkce $g(x)$ v bodě x_0 spojitá zprava. Je-li na $\langle a; x_0 \rangle$, kde číslo $a < x_0$, pro všechna x z tohoto intervalu platná rovnost $f(x) = g(x)$ a zároveň je funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitá zleva, je také funkce $g(x)$ v bodě x_0 spojitá zleva.

Z definic spojitosti funkce zprava a zleva vyplývá jedna důležitá věta: Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, jestliže je spojitá v tomto bodě zprava a zároveň zleva.

Věta definující spojitost funkcí $|f(x)|$, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ a pro $g(x_0) \neq 0$ i $f(x) / g(x)$ platí bezesbýtku i v případě, že budeme předpokládat spojitost funkcí $f(x)$ a $g(x)$ zprava nebo zleva.

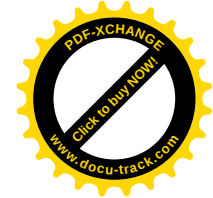
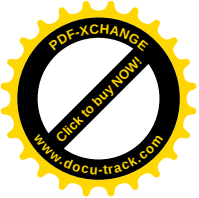
Ale pozor, přestává platit v případě spojitosti zleva nebo zprava věta, která nám vymezovala pojem spojitosti složených funkcí! Vlastnosti spojitosti složených funkcí nemůžeme pro „jednostranné“ spojitosti využít!!!

I.11 Limita funkce jedné proměnné

I.11.1 Prstencové okolí bodu x_0

V odstavcích věnovaných spojitosti funkcí byl pro nás důležitý interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ případně ještě interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}$. Tyto intervaly budou hrát v této kapitole velmi významnou roli. Ale ještě než začneme, musíme si objasnit některé nové pojmy, na kterých budeme dále stavět. Jedná se o „ δ -okolí bodu x_0 “ a „prstencové okolí bodu x_0 “. Nevědomky jsme s nimi již pracovali, ale nepoužívali jsme tohoto označení.

Význam pojmů totiž vystihují právě zmíněné intervaly založené na existenci čísla δ . Takže δ -okolím bodu x_0 rozumíme interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, který v textu označujeme $U(x_0, \delta)$, kde číslo δ je dostatečně malé, přesto kladné, reálné číslo, vyjadřující malou změnu hodnot nezávisle proměnné x v bodě $x = x_0$. Pokud nemůže dojít k záměně a je zcela zřejmé o jakou hodnotu δ se jedná, pak v zápisu δ -okolí bodu x_0 symbol δ vynecháváme a píšeme $U(x_0)$. Další možné zápisy jsou tyto: $V(x_0)$, $W(x_0)$. Důležitým faktem je, vlastní bod x_0 do $U(x_0)$ patří! Kromě toho rozlišujeme ještě pravé δ -okolí bodu x_0 $U^+(x_0)$ a levé δ -okolí bodu x_0 $U^-(x_0)$



jejichž významem jsou intervaly $U^+(x_0) = \langle x_0; x_0 + \delta \rangle$ a $U^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0]$ a to v návaznosti na spojitost funkce zprava nebo zleva.

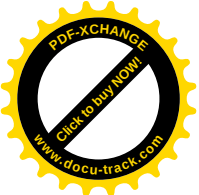
Prstencovým okolím bodu x_0 pak budeme rozumět interval $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}$. Budeme jej označovat $P(x_0, \delta)$, kde číslo δ má stejný význam jako v předcházejících případech. Opět pokud nemůže dojít k mýlce, vynecháváme symbol δ a píšeme $P(x_0)$. A pozor, do $P(x_0)$ bod x_0 nepatří!!! I v tomto případě rozlišujeme ještě pravé prstencové okolí bodu x_0 $P^+(x_0)$ a levé prstencové okolí bodu x_0 $P^-(x_0)$ jejichž významem jsou intervaly $P^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta)$ a $P^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0)$ a to opět v návaznosti na spojitost funkce zprava nebo zleva. Pilný student si tyto intervaly znázorní na číselné ose.

V limitním počtu ještě množinu všech reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšiřujeme o symboly $+\infty$ (plus nekonečno) a $-\infty$ (mínus nekonečno). Takto rozšířenou množinu všech reálných čísel značíme $\mathbb{R}^*$. A bude šikovné, když budeme vědět, jak vypadá prstencové okolí těchto bodů. Jednak platí, že $U(+\infty) = P(+\infty) = P^(+\infty)$ a také $U(-\infty) = P(-\infty) = P^-(-\infty)$. Pravé prstencové okolí $+\infty$ a levé prstencové okolí $-\infty$ totiž neexistují! K definici těchto pojmů musíme sáhnout k trošku abstraktní představě.

I.II.II Pojem vlastní limity funkce jedné proměnné ve vlastním bodě

Podívejme se na funkci $f: y = \ln x$. Jedná se o logaritmickou funkci, jejímž definičním oborem je interval $(0; +\infty)$. Chceme vědět, jak se chová funkce f v okolí bodu $x = 1$ (pojem „okolí bodu“ má nyní právě ten význam, jaký jsme mu přidělili v předcházející kapitole a tento význam bude mít i pro všechny ostatní kapitoly těchto skript!). Dosazujeme nyní hodnoty blízké jedničce (ovšem ne rovny jedné!) do přepisu funkce f a uvidíme, že se funkční hodnoty budou blížit 0. Říkáme tedy, že funkce f má v bodě $x = 1$ limitu rovnu 0. V tomto případě navíc je také $f(1) = \ln 1 = 0$, ale to pro limitu jako takovou nemá valného významu (na rozdíl od spojitosti funkce!). Proč, to si ukážeme hned v následujícím příkladě.

Definujme si jinou funkci. Funkci $g: y = \frac{e^x - 1}{x}$. Na první pohled je zřejmé, že pro hodnotu nezávisle proměnné $x = 0$ nebude mít výraz smysl. Tuto hodnotu tedy musíme z definičního oboru funkce vyjmout. Potom tedy $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$. Ve všech bodech, kromě bodu $x = 0$, je funkce g definována a je spojitá (viz. kapitola I.I.VI). Bude nás tedy eminentně zajímat, jak se funkce g chová právě v okolí bodu $x = 0$. Opět dosazujeme do přepisu funkce hodnoty blízké nule (ne však rovny nula!). Funkční hodnoty funkce g v okolí bodu $x = 0$ se budou blížit 1, budou se od jedničky jen o málo lišit. Říkáme tedy, že funkce g má v bodě



$x = 0$ limitu rovnu jedné! Ovšem v tomto případě nebyla funkce g v bodě $x = 0$ vůbec definována! Všimněte si rozdílu v porovnání s předcházejícím příkladem. V okolí bodu $x = 0$ se funkční hodnoty jen o málo liší od jedné, přesto však nelze hovořit o hodnotě funkce v bodě $x = 0$, ale jen o limitě této funkce v bodě $x = 0$!

Obecně je možné tyto myšlenky precizovat následující definicí: říkáme, že funkce $f: y = f(x)$ má v bodě $x = x_0$ (ve které nemusí být definována) limitu rovnu A právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ takové, že pro všechny hodnoty $x \in [P(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}]$ platí: $|f(x) - A| < \varepsilon$. S odvoláním na definici spojitosti musí být jasné, co tato definice říká.

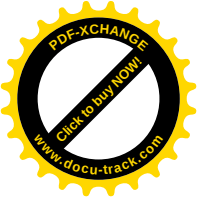
Jinými slovy, pro hodnoty x blízké x_0 (ale od x_0 odlišné) jsou funkční hodnoty funkce f ve všech bodech prstencového okolí bodu x_0 blízké číslu A . Definice samo o sobě nic neříká o tom, že by funkce f musela být nutně definována v bodě x_0 ! Existence limity ani její hodnota nezávisí na funkční hodnotě $f(x_0)$ v bodě x_0 a dokonce nezávisí ani na tom, zda je funkce f v tomto bodě definována!!! Zmíněná definice se dá zapsat i jazykem matematiky takto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(x_0) : |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Stejně jako jsme k definici spojitosti funkce v daném bodě připojili i definice týkající se spojitosti funkce v daném bodě zprava a pak i zleva, definujeme pojem limity funkce v daném bodě zprava i zleva. Definice limity změníme tak, že pro limitu v bodě x_0 zprava budeme uvažovat všechna x z pravého prstencového okolí bodu x_0 a pro limitu funkce v bodě x_0 zleva budeme uvažovat levé prstencové okolí bodu x_0 .

Tak obě definice budou vypadat následovně. Říkáme, že funkce $f: y = f(x)$ má v bodě $x = x_0$ (ve které nemusí být definována) limitu zprava rovnu A právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ takové, že pro všechny hodnoty $x \in [P^+(x_0) = (x_0; x_0 + \delta)]$ platí: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Říkáme, že funkce $f: y = f(x)$ má v bodě $x = x_0$ (ve které nemusí být definována) limitu zleva rovnu A právě tehdy, když ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ takové, že pro všechny hodnoty $x \in [P^-(x_0) = (x_0 - \delta; x_0)]$ platí: $|f(x) - A| < \varepsilon$. Opět se v ani jedné definici nemluví o $f(x_0)$, protože jak $P^+(x_0)$, tak i $P^-(x_0)$ jsou otevřenými intervaly! Smysl definic je stejný jako definice oboustranné limity.



Limitu funkce $f(x)$ v bodě x_0 zapisujeme znakem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, limitu funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava zapisujeme $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ a nakonec limitu funkce $f(x)$ v bodě x_0 zleva zapisujeme znakem $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Jestliže tedy napíšeme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ pak tím tvrdíme, že jednak limita funkce $f(x)$ v bodě x_0 existuje a zadruhé, že je právě rovna číslu A ! Podobně pro levostrannou a pravostrannou limitu.

Dostáváme se tak jedné ze základních vět o limitách. Totiž, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 vždy nejvýše jednu limitu, nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva!

Dokažme toto tvrzení. Předpokládejme existenci dvou čísel A a B , která jsou limitami funkce $f(x)$ v bodě x_0 . Zvolme tedy číslo $\varepsilon = 0,5 \cdot |A - B|$, což je číslo jistě kladné. Podle předpokladu existence dvou limit A a B funkce $f(x)$ v bodě x_0 musí k číslu ε existovat čísla δ_1 , δ_2 , pro která platí: pro libovolné $x \in P_1(x_0)$ je $|f(x) - A| < \varepsilon$ a pro libovolné $x \in P_2(x_0)$ je $|f(x) - B| < \varepsilon$. Vezměme nyní menší z čísel δ_1 , δ_2 a označme jen $\delta_{\min}$. Pak pro libovolné $x \in (x_0 - \delta_{\min}; x_0 + \delta_{\min})$ bude $|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B|$. Podle existence limit A a B musí být $|A - f(x)| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon$, to jest $|A - f(x)| + |f(x) - B| < 2\varepsilon$ a tedy $|A - B| < 2\varepsilon$. To je ale ve sporu s naším počátečním předpokladem, že $2\varepsilon = |A - B|$. Tím je věta dokázána.

Další důležitou větou o limitách je, že funkce $f(x)$ má limitu v bodě x_0 právě tehdy, když má limitu zprava i limitu zleva v tomto bodě a tyto dvě limity se rovnají! Jinak řečeno, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ právě tehdy a jen tehdy, když $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

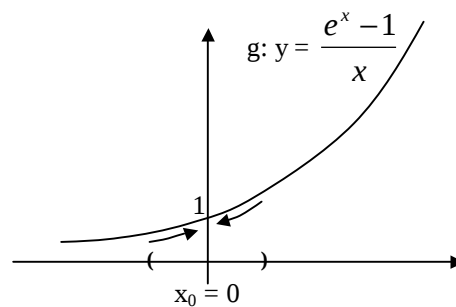
Tuto větu si dokazovat nebudeme a pilný student si důkaz jistě provede sám. Důkaz je také proveden v knize „Úvod do počtu diferenciálního“ od Prof. Dr. V. Jarníka na straně 184. My si zde ale ukážeme dva příklady, které nám smysl této věty objasní. Prvním z nich je již zmíněná funkce $g: y = \frac{e^x - 1}{x}$ a druhá bude funkce $f: y = \frac{1}{x}$. Obě funkce mají stejný definiční

obor, totiž všechna reálná čísla kromě nuly. Pro nulu nejsou tyto funkce definovány a tak nás bude zajímat, jak se v okolí tohoto bodu chovají.

Vezměme si nejprve funkci $g: y = \frac{e^x - 1}{x}$. Zkusme rozdělit okolí bodu 0 na dvě části.

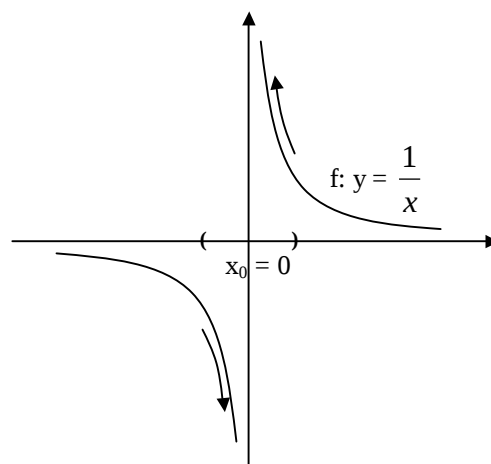
Jednak postupně zkusíme dosazovat hodnoty, které se blíží nule zprava (jsou tedy o málo větší než je nula) a za druhé budeme dosazovat hodnoty, které se blíží nule zleva (ty jsou o

málo menší než je nula). V prvním případě zjistíme, že se nám funkční hodnoty funkce $g(x)$ budou blížit jedné, respektive se budou blížit a budou vždy o něco málo větší než jedna. Čím se bude hodnota nezávisle proměnné x přiblížit více nule, funkční hodnoty se tím více budou jedničce blížit a to shora. V tomto případě má tedy funkce $g(x)$ v bodě $x_0 = 0$ pravostrannou limitu rovnu právě jedničce. Bude-li se hodnota nezávisle proměnné x blížit k nule zleva, budou se funkční hodnoty funkce $g(x)$ blížit jedné, ale budou vždy menší než jedna. A právě v limitním případě se budou funkční hodnoty funkce $g(x)$ blížit k jedničce. Takže funkce $g(x)$ má v bodě $x_0 = 0$ levostrannou limitu rovnu opět jedné. Pro funkci $g(x)$ tedy platí, že její, že se její levostranná a pravostranná limita v bodě $x_0 = 0$ rovná a proto tato funkce má limitu, a to jedničku. Viz. obrázek I.II.II.a.



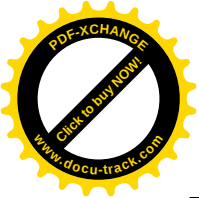
Obrázek I.II.II.a

Podívejme se nyní na funkci f . Definičním oborem této funkce jsou opět všechna reálná čísla mimo nuly, v tomto bodě není funkce definována! Jedná se o nepřímou úměrnost jejíž grafem je rovnoosá hyperbola (viz. obrázek I.II.II.b). Okolí bodu x_0 opět rozdělíme. Jednak na interval $P^+(x_0)$ a zadruhé na interval $P^-(x_0)$. V pravém prstencovém okolí bodu x_0 je situace následující. Blížíme-li se k tomuto bodu zprava, pak nám funkční hodnoty funkce $f(x)$ rostou nade všechny meze, tedy k hodnotě $+\infty$. To znamená, že limita funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$ zprava je rovna $+\infty$. V levém prstencovém okolí bodu x_0 je tomu trochu jinak. Blížíme-li se bodu $x_0 = 0$ zleva, pak nám funkční hodnoty funkce $f(x)$ klesají pode všechny meze, tedy k hodnotě $-\infty$. Funkce $f(x)$ má proto v bodě $x_0 = 0$ levostrannou limitu rovnu $-\infty$. Je vidět, že se levostranná limita funkce $f(x)$ nerovná pravostranné a proto musíme prohlásit, že zkoumaná funkce v bodě $x_0 = 0$ limitu nemá. Jinými slovy, v bodě $x_0 = 0$ limita funkce $f(x)$ neexistuje!



Obrázek I.II.II.b

Z výše řečeného je možné udělat několikero závěrů. Předně, má-li nějaká funkce v bodě x_0 limitu, pak je zkoumaná funkce definována ve všech bodech $P(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ pro $\delta > 0$. V bodě x_0 funkce nemusí být (ale může) definována.



Pokud má funkce limitu zprava v bodě x_0 , pak je jistě definována na $P^+(x_0)$ a pokud existuje její limita zleva v bodě x_0 , pak je funkce definována na $P^-(x_0)$.

Předpokládejme existenci intervalu $(a; b)$ v němž leží bod x_0 takový, že ve všech bodech intervalu $(a; b)$ mimo nejvýše bod x_0 je $f(x) = g(x)$. Za těchto podmínek pokud existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, pak také existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ a navíc $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Což vyplývá z toho, že limita není vlastností globální, týkající se celého definičního oboru funkce, nýbrž je svým charakterem vlastností lokální s působností na nějakém omezeném intervalu. Pro účely limity je tímto intervalem prstencové okolí bodu x_0 případně levo- či pravostranné prstencové okolí bodu x_0 .

V kapitole I.I.VI jsme si definovali spojitost funkce v bodě x_0 . Nebylo by možné definovat spojitost funkce v bodě x_0 také pomocí limit? Srovnáním obou definic, totiž definice spojitosti funkce $f(x)$ v bodě x_0 a definice limity funkce $f(x)$ v bodě x_0 , musíme dojít nutně k závěru, že definovat spojitost funkce pomocí limit není nic jiného, než položit další větu o limitách: funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Jinými slovy to znamená, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0 spojitá právě tehdy, existuje-li v tomto bodě limita a tato limita je rovna právě funkční hodnotě funkce $f(x)$ v bodě x_0 , tedy hodnotě $f(x_0)$.

Jednoduchou obměnou této definice pomocí záměny existence limity za existenci levo- resp. pravostranné limity, definujeme spojitost funkce zleva resp. zprava.

Máme definovaný pojem limity a také popsány a dokázány některé (podotýkám, ne všechny) vlastnosti limit. Bylo by však účelné, kdybychom s limitami dokázali dále počítat. To znamená, abychom uměli vypočítat nejen limitu nějaké funkce, ale také limitu součtu několika různých funkcí, limitu jejich rozdílu, součinu případně podílu, limitu složených funkcí, atd.

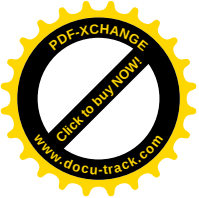
K tomu, abychom byli schopni tyto limity počítat, nám dává návod jedna z nejzákladnějších vět o limitách. Proto si ji také celou dokážeme. Mějme dvě funkce $f: y = f(x)$ a $g: y = g(x)$ a necht' $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$. Potom platí, že:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |A|$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A + B$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A - B$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$$



$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ pokud } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$$

Důkaz části (1) bude velmi jednoduchý. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Bude k němu jistě existovat $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu nezávisle proměnné x z $P(x_0)$ bude platit $|f(x_0) - A| < \varepsilon$. To ale znamená, že bude také platit za těchto podmínek i rovnost $||f(x_0)| - |A|| < \varepsilon$ a tedy $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = |A|$.

Důkaz části (2) a (3) je podobný důkazu spojitosti funkce $f(x) + g(x)$. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$. Potom také $0,5 \cdot \varepsilon > 0$. Podle předpokladu existence limit funkcí $f(x) \pm g(x)$ budou existovat čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ taková, že pro libovolné $x \in P_1(x_0)$ platí $|f(x) - A| < 0,5 \cdot \varepsilon$ a pro libovolné $x \in P_2(x_0)$ platí $|g(x) - B| < 0,5 \cdot \varepsilon$. Mějme nyní $\delta_{\min} = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pak pro $x \in P(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ je $|f(x) - A + g(x) - B| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon$, protože je $0,5 \cdot \varepsilon + 0,5 \cdot \varepsilon = \varepsilon$. Podobně pro $x \in P(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ dostáváme $|f(x) - A - g(x) + B| \leq |f(x) - A| + |B - g(x)| < \varepsilon$.

Dokažme nyní část (4). Podle předpokladu musí platit pro nějaké $\varepsilon > 0$ a k němu nalezené $\delta' > 0$, že pro libovolné $x \in P'(x_0)$ platí nerovnost $|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| < \varepsilon$. Rozložme výraz v absolutní hodnotě takto: $f(x) \cdot g(x) - A \cdot B = [f(x) - A] \cdot B + [g(x) - B] \cdot f(x)$, budeme jej dále potřebovat. Dále z předpokladu existence limity funkce $f(x)$ vyplývá, že pro nějaké číslo $\delta_1 > 0$, které jistě existuje, je $P_1(x_0)$ tak, že pro libovolné $x \in P_1(x_0)$ platí $|f(x) - A| < 1$. Zřejmě $|f(x)| = |A + f(x) - A| \leq |A| + |f(x) - A| < |A| + 1$. Vraťme se k původně zvolenému číslu ε a vypočtěme číslo $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|A| + |B| + 1}$. Pak také platí nerovnost

$\varepsilon_1 > 0$ a k tomuto číslu můžeme najít dvě čísla $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ tak, aby platilo pro libovolné $x \in P_2(x_0)$, že $|f(x) - A| < \varepsilon_1$ a zadruhé aby platilo pro libovolné $x \in P_3(x_0)$, že $|g(x) - B| < \varepsilon_1$. Takže nakonec pokud položíme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, pak pro libovolnou hodnotu $x \in P(x_0)$ platí podle výše řečeného, že $|f(x) \cdot g(x) - A \cdot B| < (|A| + 1) \cdot \varepsilon_1 + |B| \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon$. To je ale podmínka existence limity a tím je část (4) definice dokázána!

A konečně důkaz části (5). Protože platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, stačí dokázat

pouze to, že $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ za předpokladu, že $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$. To vše proto, že my předem předpokládáme, že existuje limita funkce $f(x)$ v bodě x_0 a ta je rovna A ! Je-li $B \neq 0$, pak jistě

$|B| > 0$. Předpokládejme existenci čísla $\delta_1 > 0$ tak, že pro libovolné $x \in P_1(x_0)$ platí $|g(x) - B| < 0,5 \cdot |B|$. To znamená, že $|B| \leq |g(x)| + |B - g(x)| < |g(x)| + 0,5 \cdot |B|$. Z prvního a posledního členu nerovností je zřejmé, že $|B| - 0,5 \cdot |B| < |g(x)|$ a tedy $|g(x)| > 0,5 \cdot |B|$.

Takže bude platit: $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - g(x)}{B \cdot g(x)} \right| < \frac{B - g(x)}{\frac{1}{2}B^2}$. Z existence limit podle předpokladu

volme číslo $\varepsilon > 0$ a k němu vypočteme číslo $\varepsilon_1 = 0,5 \cdot B^2 \cdot \varepsilon$. K číslu ε_1 najdeme nyní číslo δ_2 takové, že pro libovolnou hodnotu $x \in P_2(x_0)$ je $|g(x) - B| < \varepsilon_1$. Za číslo δ teď položíme $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ a podle posledních dvou nerovností pro libovolné $x \in P(x_0)$ je

$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{2}B^2} = \varepsilon$ a to znamená, že skutečně $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$. Tedy platí

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$. A tím jsme i tento bod definice dokázali!

Nutno podotknout, že dokazovaná definice platí jak pro oboustranné limity (viz. právě provedené důkazy), tak i pro levostranné resp. pravostranné limity. Stačí v definici nahradit slovo limita slovem levostranná resp. pravostranná limita. Slovy „limita“, „levostranná limita“ a „pravostranná limita“ nyní rozumím i zápisy postupně $\lim_{x \rightarrow x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ a $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$.

Výše v textu jsem už naznačil, že by bylo také dobré mít nějaký nástroj, jak počítat limity složených funkcí. Uvidíme pak sami, jak šikovné to bude. Podívejme se nyní na tuto otázku.

Zdálo by se, že stačí limitu spojitě funkce $f(g(x))$

definovat podobně jako spojitost. Tedy: platí-li

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ a $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$, pak je i

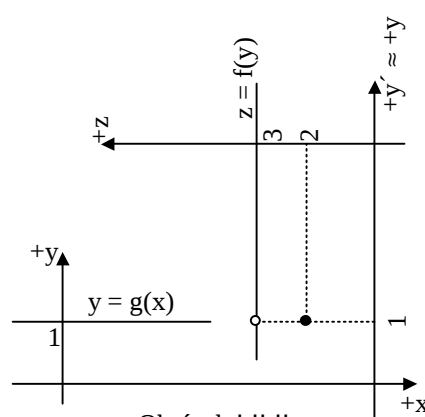
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$. To však stačit nebude. Důvod

demonstrujeme na následujícím příkladě. Mějme

definovanou vnitřní funkci $g: y = g(x) = 1$ pro libovolné

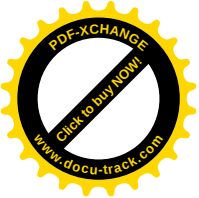
$x \in \mathbb{R}$. A také funkci $f(y)$, kde pro $y = 1$ je $f(y) = 2$ a pro

všechna $y \neq 1$ je $f(y) = 3$. Obě funkce ukazuje obrázek



I.II.II.c. Podle zadání bude $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$ a to pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$. Takže můžeme psát, že

$y_0 = 1$. Potom bude $\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 3$, protože všechny hodnoty y se sice budou blížit hodnotě 1,



ale nebudou jí rovny. Podívejte se ještě jednou na předpis naší zkoumané funkce! A teď srovnáme: platí sice, že $\lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 3$, ale také platí, že $f(g(x)) = f(1) = 2$ a to pro každé $x \in \mathbb{R}$, což v praxi znamená, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = 2$ opět pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$! A to je spor, protože $\lim_{y \rightarrow 1} f(y) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$. Takže je třeba něco změnit, aby definice limity spojitě funkce nebyla zdrojem sporů. Zároveň nám však tento příklad dává odpověď na otázku, co je zde chybného a také návod, jak je třeba definici doplnit.

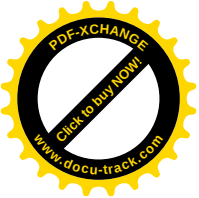
Definice limity složené funkce je tedy třeba formulovat takto: nechť je $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ a $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = A$. Říkáme, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = A$ právě tehdy, když existuje číslo $\Delta > 0$ takové, že nerovnost $g(x) \neq A$ platí pro všechna $x \in [(x_0 - \Delta; x_0 + \Delta) - \{x_0\}]$. Tuto větu si dokazovat nebudeme (důkaz proveden v knize „Úvod do počtu diferenciálního“ od Prof. V. Jarníka na straně 192), ale ukážeme si její užití na příkladě.

Dokažme nyní existenci limity: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} = 1$. Existenci této limity ukážeme podle posledně uváděné definice pro limitu složené funkce. Mějme tedy $y = g(x) = x^2 - 1$ a potom limita přejde ve tvar limitovaná funkce přejde na tvar $f(y) = \frac{e^y - 1}{y}$. Platí, že

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ a pak i $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$. Takže podle definice opravdu

platí $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} = 1$ a to právě tehdy, jestliže se podaří najít takové číslo $\Delta > 0$, že nerovnost $g(x) \neq 0$ bude splněna pro všechna $x \in [(1 - \Delta; 1 + \Delta) - \{1\}]$. Výraz $x^2 - 1$ je roven nule pouze pro $x = \pm 1$, pro žádná jiná x ! Vezmeme-li například libovolnou hodnotu $x \in [(-1; 3) - \{1\}]$, potom jistě $x \neq 1$ a $x \neq -1$ a proto také $x^2 - 1 \neq 0$. Znamená to, že mohu číslo Δ volit například takto $\Delta = 2$ a tím je důkaz proveden!

Pokud chci tedy dokázat, že nějaká funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou A , pak musím dokázat, že ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ takové, že pro libovolnou hodnotu x z intervalu $P(x_0) = [(x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}]$ bude splněna nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$. A při vyšetřování těchto podmínek existence limity stačí, abychom nejdříve zvolili nějaké kladné ε_1 a pak se omezili jen na kladné hodnoty ε , které jsou menší nebo nejvýše rovny právě číslu ε_1 . Dokážeme-li, že ke každému kladnému $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ existuje kladné číslo δ mající



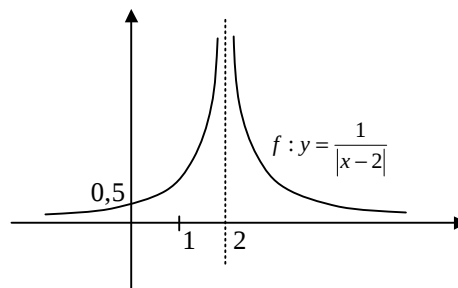
námi požadované vlastnosti, pak také toto číslo δ existuje jistě i pro každé $\varepsilon > \varepsilon_1$! Stejně tak i v případě jednostranných limit.

I.II.III Pojem nevlastní limity funkce jedné proměnné ve vlastním bodě

Až do této chvíle jsme se zabývali vlastními limitami funkcí v jejich vlastních bodech. Pojem vlastní limity A libovolné funkce f pro nás znamenal, že se jednalo o hodnotu A z množiny všech reálných čísel. Podobně vlastní bod funkce byl pro nás bodem buď z definičního oboru uvažované funkce f a nebo to byl bod mimo její definiční obor, ale také náležel do množiny všech reálných čísel.

Zde se však situace změní. Zavedeme si pojem nevlastní limity nějaké funkce f v jejím vlastním bodě. Podívejme se na funkci $f : y = \frac{1}{|x-2|}$. Jejím definičním oborem jsou všechna

reálná čísla, kromě hodnoty $x = 2$. Podívejme se nyní, jak vypadá graf funkce f v okolí právě bodu $x = 2$. Budeme-li se hodnotě $x = 2$ blížit zprava, bude nabývat jmenovatel stále menších hodnot (ale vždycky kladných), které se budou blížit nule (nikdy však nebude hodnota jmenovatele rovna nule!). To znamená, že funkční hodnoty funkce f budou naproti tomu nabývat stále větších hodnot a v limitním případě porostou nade všechny meze! Vzhledem k absolutní hodnotě v předpisu funkce f tomu bude stejně i tehdy, budeme-li se k bodu $x = 2$ blížit zleva. Takže můžeme říci, že funkční hodnoty funkce f v okolí bodu $x = 2$ rostou nade všechny meze, tedy k $+\infty$. V takovém případě říkáme, že limita funkce f pro $x \rightarrow 2$ je rovna

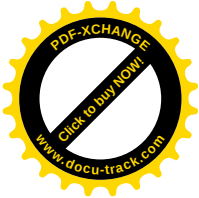
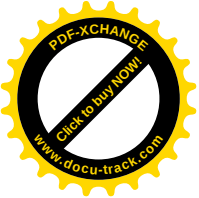


Obrázek I.II.III.a

$+\infty$. Graf funkce f je zobrazen na obrázku I.II.III.a. Pilný student se již sám zamyslí nad tím, jak by podobná úvaha vypadala v případě, že by v předpisu funkce f chyběla absolutní hodnota. Limita takto vzniklé funkce by totiž pro $x \rightarrow 2$ neexistovala!

Nebyl by patrně žádný problém zkonstruovat funkci g , jejíž funkční hodnoty by v okolí jistého bodu x klesali pode všechny meze a která by tak měla v uvažovaném bodě x limitu rovnu $-\infty$. Stačilo by jen ve funkci f vzít čitatele z množiny všech reálných čísel menších než nula (tedy záporných).

Pojem nevlastní limity nějaké funkce není tedy nic jiného, než že hodnota A určované limity je rovna buď $+\infty$ a nebo $-\infty$. A můžeme přistoupit k samotným definicím.



Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 nevlastní limitu $+\infty$ právě tehdy, když ke každému reálnému číslu K existuje reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu $x \in P(x_0)$ platí, že $f(x) > K$. Tuto skutečnost pak zapisujeme: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Analogicky, funkce $f(x)$ má v bodě x_0 nevlastní limitu $-\infty$ právě tehdy, když ke každému reálnému číslu K existuje reálné číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu $x \in P(x_0)$ platí, že $f(x) < K$. A zápis vypadá takto: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Zcela analogicky se také definuje levostranné a pravostranné nevlastní limity funkce $f(x)$ v bodě x_0 a v matematice je postupně zapisujeme: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$. Prstencové okolí bodu x_0 nahrazujeme u prvních dvou

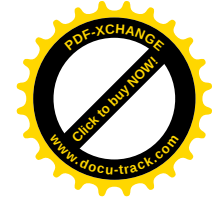
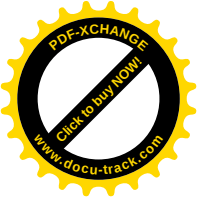
symbolů v definicích za levostranné prstencové okolí bodu x_0 a u druhých dvou symbolů pak za pravostranné prstencové okolí bodu x_0 .

Je zřejmé, že pokud existuje k nějakému K_1 číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu $x \in P(x_0)$ bude $f(x) > K_1$, pak bude určitě existovat takové číslo $\delta > 0$ i ke každému $K < K_1$ (dokonce můžeme pro K vzít stejné číslo δ jako pro K_1 , protože z nerovnosti $f(x) > K_1$ plyne také, že $f(x) > K$). Takže při vyšetřování platnosti zápisu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ postačí se omezit jen na hodnoty K , které jsou větší než libovolně zvolené K_1 . Analogicky při vyšetřování platnosti zápisu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ stačí se omezit na hodnoty K , které jsou menší než libovolně zvolené K_1 . Stejně tak pro levo- i pravostranné limity.

Nyní si povíme něco o obecných vlastnostech nevlastních limit. Řekli jsme si, že libovolná funkce f má v bodě x_0 vždy nevyše jednu limitu, nevyše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva. Tato věta bude platit i pro nevlastní limity! Pokud tedy bude mít funkce f v bodě x_0 vlastní limitu, nemůže mít současně v bodě x_0 limitu nevlastní!

Pro libovolnou funkci $f(x)$ je pak možné psát:

- (1) Pokud má funkce $f(x)$ v bodě x_0 vlastní limitu A , potom nemůže mít v bodě x_0 limitu nevlastní.
- (2) Jestliže má funkce $f(x)$ v bodě x_0 limitu $+\infty$, pak nemůže mít v bodě x_0 ani vlastní limitu A a ani nevlastní limitu $-\infty$.
- (3) Jestliže má funkce $f(x)$ v bodě x_0 limitu $-\infty$, pak nemůže mít v bodě x_0 ani vlastní limitu A a ani nevlastní limitu $+\infty$.
- (4) Funkce $f(x)$ nemá v bodě x_0 ani vlastní limitu A ani nevlastní limitu



Analogické vlastnosti platí i v případě levostranných a pravostranných limit!

Právě uvedené vlastnosti a definice týkající se nevlastních limit si ukážeme v praxi na dvou následujících příkladech. Mějme funkci $f : y = \frac{1}{(x-1)^2}$. Funkce f není definována v bodě $x_0 = 1$, ale v okolí tohoto bodu žádný problém není a zadaná funkce je tak definovaná ve všech bodech $P(x_0)$. A právě to, jak se bude funkce f v okolí bodu 1 chovat nás zajímá nejvíce. Vyšetřeme nyní $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2}$. Pro hodnoty blízké $x_0 = 1$ nabývá funkce velkých kladných hodnot. Dá se tedy předpokládat, že $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ a tuto skutečnost musíme nyní ověřit. Podle definice musí k libovolnému K existovat číslo $\delta > 0$ takové, že pro jakoukoliv hodnotu $x \in P(1)$ musí platit $\frac{1}{(x-1)^2} > K$. Stačí se v tomto případě omezit jen na kladné hodnoty K . Řešme tedy nyní tuto nerovnici:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2} > K &\Leftrightarrow K < \frac{1}{(x-1)^2} \\ (x-1)^2 &< \frac{1}{K} \\ |x-1| &< \frac{1}{\sqrt{K}}\end{aligned}$$

Pro $K < 0$ je nerovnost splněna vždy, takže je-li $K \leq 0$, pak můžeme volit číslo $\delta = 1$. Pro $K > 0$ položíme číslo $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$. K libovolnému K jsme tedy skutečně našli nějaké kladné číslo δ takové, že pro libovolné $x \in P(1)$ bude nerovnost $\frac{1}{(x-1)^2} > K$ splněna. Tak například zvolme $K = 100$. Potom $\delta = 0,1$ a $P(1) = [(0,9; 1,1) - \{1\}]$. Podle definice musí být pro libovolnou hodnotu $x \in P(1)$ nerovnost $\frac{1}{(x-1)^2} > 100$ splněna. Takže mějme například $x = 0,95$. Výraz na levé straně nerovnosti má pak hodnotu 400 . Skutečně tedy platí náš původní předpoklad, že $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Jako druhý příklad máme vyšetřit $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x$. Definičním oborem funkce $\log x$ jsou všechna kladná reálná čísla, tedy interval $(0; +\infty)$. Budeme-li vynášet funkční hodnoty této funkce v blízkosti 0 (ale vpravo od nuly), zjistíme, že nabývají stále menších hodnot. Zřejmě

bude tedy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ a tuto skutečnost musíme nyní ověřit. Pro libovolné číslo K musí tedy existovat $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu $x \in P^+(0)$ bude nerovnost $\log x < K$ splněna. Můžeme se dokonce omezit pouze na záporné hodnoty čísla K ! Z nerovnosti vyplývá, že $x < 10^K$ a tak volme $\delta = 10^K$. Dokázali jsme tedy k libovolné hodnotě K (omezili jsme se jen na záporné K) najít kladné číslo δ . Zvolme například $K = -10$. Potom $\delta = 0,0000000001$ a $P^+(0) = (0; 0,0000000001)$. Zvolme nyní libovolnou hodnotu $x \in P^+(0)$, bez ztráty obecnosti například $x = 0,00000000001$. Potom $\log x = -11 < -10$. Podobně například pro $K = -1000$. Skutečně tedy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$.

Pojďme dále. Mějme nyní libovolnou funkci $f(x)$, pro kterou platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

Jak bude vypadat limita funkce $\frac{1}{f(x)}$, tedy $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x)} \right]$? Podle vět o limitách platí následující

úpravy: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} 1}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} = \frac{1}{+\infty}$. Nyní je třeba určit hodnotu posledně

uvedeného výrazu. Budeme-li stále zvětšovat číslo ve jmenovateli, bude se hodnota zlomku stále více blížit nule a to zprava. Bude proto zřejmě platit, že pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, pak

$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = 0$. Podobně i pro případ, kdy $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$. Potom také $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{g(x)} \right] = 0$!

Předcházející úvahu nelze v žádném případě považovat za důkaz, ale je průhlednější než důkaz samotný. Pro zájemce, důkaz je uveden v již několikrát zmiňované knize „Úvod do počtu diferenciálního“ od Prof.V. Jarníka.

Shrňme nyní pravidla pro počítání s nevlastními limitami do několika přehledně řazených bodů. Pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} e(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ a konečně $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, potom:

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [e(x) \cdot g(x)] = +\infty \cdot A = \begin{cases} +\infty & \text{pro } A > 0 \\ -\infty & \text{pro } A < 0 \end{cases}$$

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty \cdot A = \begin{cases} +\infty & \text{pro } A < 0 \\ -\infty & \text{pro } A > 0 \end{cases}$$

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [e(x) \pm g(x)] = +\infty \pm A = +\infty$$

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = -\infty \pm A = -\infty$$

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot e(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} e(x) = k \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } k > 0 \\ -\infty & \text{pro } k < 0 \end{cases}$$

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k \cdot (-\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } k < 0 \\ -\infty & \text{pro } k > 0 \end{cases}$$

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [e(x) \cdot f(x)] = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [e(x) \cdot e(x)] = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

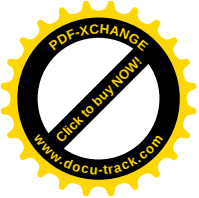
$$\S \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot f(x)] = -\infty \cdot (-\infty) = +\infty$$

I.II.IV Pojem vlastní limity funkce jedné proměnné v nevlastním bodě

Až do této chvíle jsme se zajímali o to, jak se chová nějaká funkce $f(x)$ v okolí jistého bodu x_0 , přičemž tento bod mohl, ale také nemusel být z definičního oboru zkoumané funkce $f(x)$. K popisu funkcí je ale důležité vědět, jak se chovají, když hodnota argumentu x jde nade respektive pode všechny meze. Tedy ve chvíli, kdy se x blíží hodnotě $+\infty$ respektive $-\infty$. Abychom dokázali popsat toto chování, zavádíme v matematice pojem nevlastního bodu zkoumané funkce a vyšetřujeme tak limity, které můžeme vyjádřit pomocí matematických zápisů $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. V nadpisu této kapitoly se hovoří o vlastních limitech a tak je zřejmé, že výsledkem právě zmíněných symbolů musí být nějaká hodnota A různá od $\pm\infty$. Můžeme tedy psát symboly: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ nebo $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$. A právě vyšetřováním těchto limit se nyní budeme zabývat.

Limity v nevlastních bodech vyšetřované funkce zavedeme pomocí jistého bodu C na číselné ose x , který má podobné vlastnosti jako bod K na ose y pro definici nevlastních limit. Totiž, že bod C existuje, není to $+\infty$ nebo $-\infty$, ale hned následující hodnota za bodem C již nekonečno (plus nebo mínus) bude! Poněkud abstraktní představa, ale budeme se s ní muset zatím spokojit. Definice limit v nevlastních bodech sledované funkce tak budou mít tvar: říkáme, že funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě x jdoucí k $+\infty$ limitu rovnu A právě tehdy, když ke každému kladnému ε existuje číslo C takové, že pro všechna $x > C$ je nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ splněna. Skutečnost danou definicí zapisujeme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Definice se mi nyní zdá velmi intuitivní, průhledná, a proto si ji dokazovat nebudeme. Kdo by chtěl proniknout do problematiky hlouběji, může si definici vyhledat a nastudovat v některé z literatur doporučených k dalšímu studiu na konci těchto skript.



Podobně budeme definovat vlastní limitu v nevlastním bodě x jdoucí k $-\infty$. Totiž funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě x jdoucí k $-\infty$ limitu rovnu A právě tehdy, když ke každému kladnému ε existuje číslo C takové, že pro všechna $x < C$ je nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ splněna. Toto pak zapisujeme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Podívejme se na příklad. Vyšetřeme limitu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$. Následující úpravy nás dovedou k výsledku, který pak musíme ještě dokázat. Takže

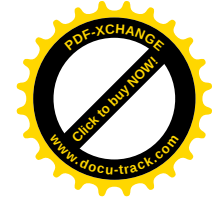
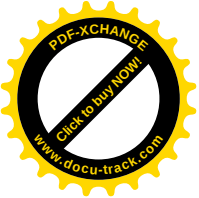
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 0} = 0.$$

Došli jsme k výsledku (výpočet jsem úmyslně rozepsal krok po kroku aby bylo zřejmé, jakým způsobem jsme výsledku došli!) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$. Nyní zbývá dokázat, že tomu tak skutečně

je. Podle definice musí k libovolnému kladnému ε existovat na ose x bod C takový, že pro libovolnou hodnotu $x > C$ bude splněna nerovnost $\left| \frac{x}{x^2 + 1} - 0 \right| < \varepsilon$. Takže úpravami dostáváme:

$$\begin{array}{ll} \left| \frac{x}{x^2 + 1} - 0 \right| < \varepsilon & \frac{x}{x^2 + 1} < \varepsilon \\ \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon & -\varepsilon x^2 + x - \varepsilon < 0 \\ \frac{|x|}{x^2 + 1} < \varepsilon & \varepsilon x^2 - x + \varepsilon > 0 \end{array}$$

Při volbě hodnoty $C = \max(x_1; x_2)$ dostáváme řešení $C = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$ a je zřejmé, že abychom mohli najít hodnotu C , musí být diskriminant větší, nejméně roven nule! Takže $|\varepsilon| \leq 0,5$, což znamená, že $\varepsilon \in (0; 0,5)$ – uvědomme si, číslo ε musí být kladné! Z toho lze také usoudit, že funkční hodnoty studované funkce nikdy nebudou větší než $0,5$ a menší než $-0,5$. Zvolme tedy $\varepsilon = 0,001$. Potom $C = \max(x_1; x_2) = \max(0,001; 999,999) = 999,999$. Podle definice zvolme nyní $x > C$, takže například $x = 1000$. Potom $|f(1000)| = |0,000\bar{9}| < 0,001$. Tím jsme s důkazem hotovi!



Jako druhý příklad vezmeme velmi podobnou limitu, totiž $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$. Výpočtem

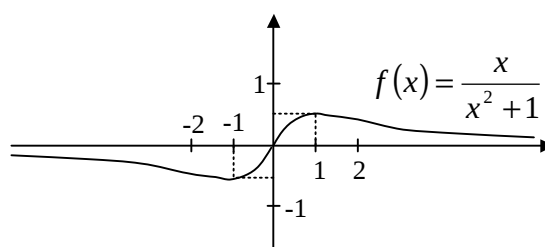
zcela analogickým tomu předcházejícímu dojdeme k výsledku $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$. Dokažme jej.

Podle definice musí k libovolnému kladnému ε existovat na ose x bod C takový, že pro libovolnou hodnotu $x < C$ bude splněna nerovnost $\left| \frac{x}{x^2 + 1} - 0 \right| < \varepsilon$. Takže úpravami dostáváme:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{x^2 + 1} - 0 \right| < \varepsilon & \quad \frac{-x}{x^2 + 1} < \varepsilon \\ \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon & \quad -\varepsilon x^2 - x - \varepsilon < 0 \\ \frac{|x|}{x^2 + 1} < \varepsilon & \quad \varepsilon x^2 + x + \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Při volbě hodnoty $C = \min(x_1; x_2)$ dostáváme řešení $C = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$ a je zřejmé, že abychom mohli najít hodnotu C , musí být diskriminant větší, nejméně roven nule! Takže $|\varepsilon| \leq 0,5$, což znamená, že $\varepsilon \in (0; 0,5)$ – i zde si uvědomme, číslo ε musí být kladné! Z toho lze také usoudit, že funkční hodnoty studované funkce nikdy nebudou větší než 0,5 a menší než -0,5. Zvolme tedy $\varepsilon = 0,001$. Potom $C = \min(x_1; x_2) = \min(-0,001; -999,999) = -999,999$. Podle definice zvolme nyní $x < C$, takže například $x = -1000$. Potom $|f(-1000)| = |-0,0009| < 0,001$. Tím jsme opět s důkazem hotovi!

V obou případech bychom při jiné volbě čísla ε doslati také jiné hodnoty C . Ale pro všechny body x větší respektive menší než C by byla ona nerovnost vycházející z definice splněna! Pro úplnost je graf funkce $f(x)$ uveden na obrázku I.II.IV.a.

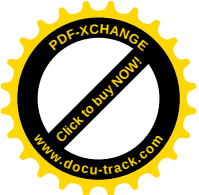


Obrázek I.II.IV.a

Uvedu zde ještě jednu definici, která je velmi užitečná. Totiž, že platí $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

jestliže platí $\lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A$. Také platí $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ pokud $\lim_{y \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{y}\right) = A$. Pro účely

definice můžeme místo symbolu $\lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ psát také $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ a podobně, protože nezáleží



na tom, jak proměnnou označujeme. Pomocí této definice je možné převést limity v nevlastních bodech $\lim_{x \rightarrow +\infty}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ na levostranné případně pravostranné limity v bodě 0!

I.II.V Pojem nevlastní limity funkce jedné proměnné v nevlastním bodě

Podívejme se nyní na funkci $f: y = x^2$. Budeme-li zkoumat limitu v nevlastním bodě funkce f , v tomto případě v bodě $+\infty$, zjistíme, že se situace změní. Čím větší bude hodnota argumentu x funkce f , tím větší bude i její funkční hodnota $f(x)$. Pokud hodnota argumentu vzroste nade všechny meze, vzroste nade všechny meze i funkční hodnota funkce f . Zřejmě bude platit následující rovnost: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Jak se bude funkce f chovat v případě, kdy půjdeme s hodnotou argumentu x pode všechny meze? Zřejmě se budou funkční hodnoty funkce f stále zvětšovat až nakonec také vzrostou nade všechny meze. Můžeme tedy psát, že $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Funkci f z předchozích dvou odstavců malinko změňme a provedme podobnou úvahu pro funkci $g: y = -x^2$. Poroste-li hodnota argumentu x nade všechny meze, půjde funkční hodnota funkce g pode všechny meze, tedy, bude se blížit $-\infty$. Analogicky k prvním dvěma příkladům můžeme psát platnou rovnost $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$.

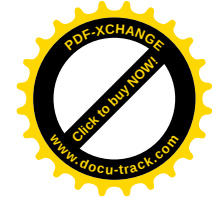
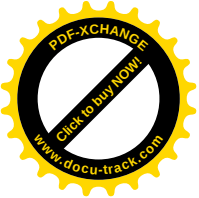
Je zřejmé, že i v případě, kdy hodnota argumentu funkce g půjde pode všechny meze, půjde pode všechny meze i funkční hodnota funkce g . Můžeme i zde psát rovnost $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$. Z těchto příkladů je vidět, že si nevystačíme s až dosud zavedenými pojmy, které se týkají limit. Pro úplnost dodávám, že grafem funkce f je parabola procházející počátkem souřadné soustavy (O, x, y) a otevřená ve směru kladné osy y . Podobně grafem funkce g je parabola procházející počátkem ale otevřená ve směru záporné osy y . Myslím, že grafy netřeba načrtnout neboť jejich představa je velmi jednoduchá.

K důkazu limit funkcí f a g je možné použít také posledně uváděné definice v kapitole

I.II.IV! Patrně bude platit například toto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ jestliže $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^2 = +\infty$. Jednička

dělená nekonečně malým, ale kladným číslem, poroste jistě nade všechny meze, tím spíše pak čtverec tohoto čísla. Výsledkem limity musí tedy být hodnota $+\infty$. Toto sice není precizní důkaz, ale formálně pro získání představy použití zmiňované definice v kapitole I.II.IV jistě postačující. Podobně bychom postupovali i v ostatních případech limit funkcí f a g .

Především úvahy nás tedy přivedly k zavedení ještě dalších důležitých typů limit. Totiž nevlastní limity v nevlastním bodě, kdy jak bod x_0 , v němž určíme limitu, tak limita sama,



jsou hodnoty $+\infty$ nebo $-\infty$. Nedefinujeme si zde tyto typy limit, nicméně pilný student po nastudování předešlých kapitol by měl být schopen následující definice vyslovit. Jsou totiž analogiemi již definovaných limit a proto je zde uvedu bez důkazu.

Tedy: říkáme, že funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$ nevlastní limitu rovnu $+\infty$ právě tehdy, když ke každému kladnému K existuje kladné číslo C takové, že pro libovolnou hodnotu $x > C$ bude $f(x) > K$. Tuto skutečnost zapisujeme platnou rovností $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Body K a C mají stejnou funkci jako v kapitolách I.II.III a I.II.IV, totiž předpokládáme o nich to, že existují (bod K na ose y , bod C na ose x souřadné soustavy (O, x, y)), také to, že nejsou rovny hodnotě $+\infty$ respektive $-\infty$, ale že hned následující bod za respektive před nimi již $+\infty$ respektive $-\infty$ je! To je poměrně obtížná představa, pomůžeme si alespoň trochu číselnou osou.

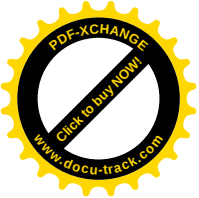
Definujme nyní zbývající nevlastní limity v nevlastních bodech. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v nevlastním bodě $+\infty$ nevlastní limitu rovnu $-\infty$ právě tehdy, když ke každému zápornému K existuje kladné číslo C takové, že pro libovolnou hodnotu $x > C$ bude $f(x) < K$. Tuto skutečnost zapisujeme platnou rovností $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Pokud ve výše uvedených dvou definicích zaměníme kladné číslo C za záporné a nerovnost $x > C$ za nerovnost $x < C$, dostáváme definice postupně pro výrazy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Tím jsme si dodefinovali to, co pilný student již beztak tušil.

I.II.VI Limity typu $f(x)^{g(x)}$

Pro řešení limit typu $f(x)^{g(x)}$ využíváme vět o limitách složených funkcí a dále logaritmů (nejčastěji přirozených). Pohybujeme se na množině všech reálných čísel, takže je nutné předpokládat, že $f(x) > 0$. A zopakujme také definici přirozeného logaritmu. Totiž říkáme, že $y = \ln x$ právě tehdy, když $e^y = x$. Z levé strany ekvivalence dosadíme nyní za y do strany pravé a dostáváme rovnost: $e^{\ln x} = x$.

Pomocí této vlastnosti logaritmů můžeme upravit i funkci $f(x)^{g(x)}$. Dosadíme nyní za hodnotu x celou funkci $f(x)^{g(x)}$ a dostáváme rovnost $f(x)^{g(x)} = e^{\ln[f(x)^{g(x)}]} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$. Funkci $g(x)$, která byla původně exponentem, jsme pomocí vlastností logaritmů přesunuli do součinu s logaritmem funkce $f(x)$!



A teď se podíváme, jak nám to při vyšetřování limit funkcí typu $f(x)^{g(x)}$ pomůže. Máme vyšetřit limitu $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^{g(x)}]$. Využijeme nyní vlastností logaritmů a můžeme psát, že

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^{g(x)}] = \lim_{x \rightarrow x_0} [e^{\ln[f(x)^{g(x)}]}] = \lim_{x \rightarrow x_0} [e^{g(x) \ln[f(x)]}]$$

Dále podle věty o limitě složené funkce (viz. kapitola I.II.II) rozložíme vyšetřovanou limitu na dvě. Stručně řečeno, jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)] = y_0$ a zároveň $\lim_{y \rightarrow y_0} [e^y] = A$, potom bude platit, že $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^{g(x)}] = \lim_{x \rightarrow x_0} [e^{g(x) \ln[f(x)]}] = A$. V této větě je tedy popsán postup vyšetřování všech limit typu $f(x)^{g(x)}$. Vyšetříme nejprve $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)]$ a pokud existuje, její hodnotu označíme y_0 . V druhém kroku pak vyšetříme $\lim_{y \rightarrow y_0} [e^y]$ a její hodnotu označíme A (výraz e^x je definován pro všechna reálná čísla, takže jeho limita určitě existovat bude). Číslo A je pak onou původně hledanou limitou funkce $f(x)^{g(x)}$.

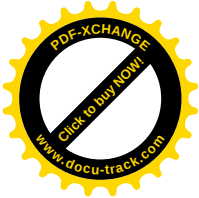
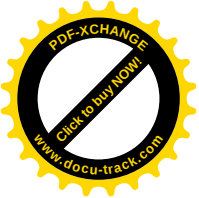
V předcházejících odstavcích této kapitoly jsem psal symbol $\lim_{x \rightarrow x_0}$. Vše co bylo řečeno však platí také pro všechny ostatní zápisy limit, tedy i pro $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.

Podívejme se nyní na příklad. Vyšetříme limitu $\lim_{x \rightarrow 2} [x^{-x}]$. Pohybujeme se na množině všech reálných čísel, takže definičním oborem funkce $f: y = x^{-x}$ jsou všechna kladná reálná čísla (nula mezi ně nepatří)! Takže převedeme limitu pomocí logaritmů na tvar $\lim_{x \rightarrow 2} [e^{\ln(x^{-x})}] = \lim_{x \rightarrow 2} [e^{-x \cdot \ln(x)}]$. Nyní vyšetříme $\lim_{x \rightarrow 2} [-x \cdot \ln(x)] = -2 \cdot \ln 2 \cong -1,386$. A nakonec vyšetříme limitu $\lim_{y \rightarrow -2 \cdot \ln 2} [e^y] = e^{-2 \cdot \ln 2} = 0,25$. Takže můžeme psát, že $\lim_{x \rightarrow 2} [x^{-x}] = 0,25$.

Je zřejmé, že tento příklad je jednoduchý a že nebylo třeba užít pro jeho vyřešení logaritmů. Zvolil jsem jej ale záměrně, aby byl lépe patrný princip výpočtu a aby student mohl sám zkontrolovat že tomu tak skutečně je.

I.II.VII Vyšetřování limit funkce jedné proměnné, neurčité výrazy

V kapitolách I.II.II a I.II.III jsme definovali pravidla pro počítání limit. Uvedli jsme (a také si dokázali), že pokud existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, pak také existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$ a pro $B \neq 0$ také $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/g(x)] = A/B$. Totéž pro levostranné a pravostranné limity a také pro limity v nevlastních bodech.



Jak tomu je ale v případě podílu funkcí $f(x) / g(x)$, kdy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$? Zkusme se nyní na problém podívat. Zřejmě pokud bude ke každému kladnému číslu δ existovat číslo $x \in P(x_0)$ – kde ovšem $x \neq x_0$ – takové, že $g(x) = 0$, potom nemá podíl $f(x) / g(x)$ vůbec smysl a limita tohoto podílu nebude vůbec existovat! Takový případ jde však mimo náš zájem. Zajímá nás ale případ, kdy ke každému kladnému číslu δ existuje číslo $x \in P(x_0)$ – kde ovšem opět $x \neq x_0$ – takové, že $g(x) \neq 0$. V takovém případě je hodnota x velmi blízká hodnotě x_0 , funkční hodnota $g(x)$ je velmi blízká nule avšak od nuly různá a nakonec funkční hodnota funkce $f(x)$ je velmi blízká hodnotě $A \neq 0$. Zlomek $f(x) / g(x)$ má tak velmi velkou absolutní hodnotu a proto platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$. Potom ale pomocí vyšetřování znamének funkčních hodnot funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v okolí bodu x_0 můžeme rozhodnout, zda je $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ a nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$. Jedná vlastně o vyšetřování limit typu $A / 0$, tedy o neurčité výrazy typu $A / 0$. V tomto případě mohou nastat čtyři možnosti:

- 1) Pokud je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ a pro libovolnou hodnotu

$$x \in P(x_0) \text{ platí, že } g(x) > 0, \text{ potom je } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

- 2) Pokud je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ a pro libovolnou hodnotu

$$x \in P(x_0) \text{ platí, že } g(x) < 0, \text{ potom je } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

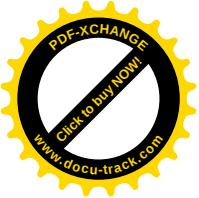
- 3) Pokud je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ a pro libovolnou hodnotu

$$x \in P(x_0) \text{ platí, že } g(x) > 0, \text{ potom je } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

- 4) Pokud je $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A < 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ a pro libovolnou hodnotu

$$x \in P(x_0) \text{ platí, že } g(x) < 0, \text{ potom je } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Omezíme-li se v možnostech 1) až 4) na $P^+(x_0)$ respektive na $P^-(x_0)$, platí to i pro levo- a pravostranné limity vyšetřované v bodě x_0 a totéž platí také pro limity vyšetřované v nevlastních bodech funkcí.



Poslední poznámkou k vyšetřování limit typu $A / 0$ je, že pokud pro libovolné $x \in P^+(x_0)$ jsou $g(x) > 0$ a zároveň pro libovolné $x \in P^-(x_0)$, kde $P^+(x_0) \cup P^-(x_0) = P(x_0)$, jsou $g(x) < 0$, potom levostranná a pravostranná limita mají různá znaménka a při stejném A pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ neexistuje!}$$

Podívejme se na příklad. Máme vyšetřit $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2}$. Zřejmě $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$ a

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0.$$

Bude se jednat tedy o limitu typu $A / 0$. Pokud půjdeme s argumentem x

k číslu 2 zleva, bude hodnota druhé mocniny závorky nabývat malých, ale nenulových, kladných hodnot. Podobně na tom budeme i v případě, že s argumentem x půjdeme k číslu 2 zprava. Opět bude čtverec závorky malý, kladný, nikoli však nulový, číslo. To ale znamená, že pro všechny hodnoty $x \in P(2)$ nabývá jmenovatel sice velmi malé, ale nenulové, kladné funkční hodnoty. S využitím věty, že pokud jsou si levostranná i pravostranná limita zkoumané funkce rovny, bude mít tato funkce limitu jím rovnu, můžeme uzavřít, že

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{(x-2)^2} = +\infty.$$

Vyšetřeme nyní $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4}{(x-2)^3}$. Funkci z předcházejícího odstavce jsme zdánlivě velmi

málo změnili, ale pro výpočet limity této funkce bude mít změna zásadní vliv! Bude

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^4 = 16 \text{ a } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^3 = 0.$$

Jedná se tedy opět o limitu typu $A / 0$. Pokud půjdeme

s argumentem x k číslu 2 zleva, bude hodnota třetí mocniny závorky nabývat malých,

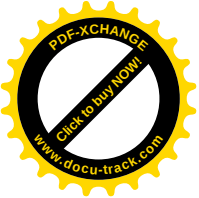
nenulových, záporných hodnot. To znamená, že bude $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4}{(x-2)^3} = -\infty$. V případě, že

s argumentem x půjdeme k číslu 2 zprava, bude hodnota třetí mocniny závorky malá, kladná,

opět však nenulová, číslo. To ale znamená, že bude $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4}{(x-2)^3} = +\infty$. Je zřejmé, že si

levostranná a pravostranná limita vyšetřované funkce rovny nejsou a proto můžeme zkonstatovat, že této limita v bodě $x = 2$ neexistuje!

Jako cvičení si načrtněte, jak vypadají grafy obou posledně vyšetřovaných funkcí (například pomocí MS Excel). Jejich grafické znázornění Vám určitě smysl a logiku výpočtu ještě více zprůhlední.



Jako poznámku uvedu ještě tu skutečnost, že při řešení posledních dvou limit jsme užili větu, která říká, že vyšetřovaná funkce $f(x)$ má v bodě x_0 (může to být bod vlastní i nevlastní) limitu rovnu A (opět vlastní nebo nevlastní) právě tehdy, má-li v tomto bodě limitu zprava rovnu A a zároveň limitu zleva rovnu A . Pokud tomu tak není, limita zkoumané funkce v bodě x_0 neexistuje!

Další možností, se kterou se můžete při vyšetřování limit v souvislosti s neurčitými výrazy setkat, je limita typu $0/0$. Jedná se o případ, kdy určujeme limitu podílu dvou funkcí

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Při řešení limit tohoto typu budeme využívat

matematického aparátu, který zatím nemáme zaveden. Jedná se derivace funkcí jedné proměnné. Tento nedostatek samozřejmě brzy napravím. Je však také možné, dříve než se pustíte do dalšího studia této kapitoly, přeskočit následující text, nastudovat derivace funkcí jedné proměnné a pak se na toto místo opět vrátit.

Postupy, které v následujících odstavcích popíši a kterými řešíme limity typu $0/0$ (dále ještě uvidíme, že také limity typu ∞/∞) se souhrnně nazývají l'Hospitalovým pravidlem (čti „lopital“). Jedná se o několik definicí, které nakonec shrneme pod jednu jedinou a tu pak budeme nazývat výše jmenovaným pravidlem.

Definujme zaprvé, necht' $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$. Dále necht' existuje

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, kde tato limita může být vlastní i nevlastní. Potom existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

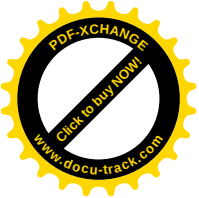
rovnost $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Totéž pro $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ a $\lim_{x \rightarrow x_0}$!

Tuto větu si nyní dokážeme, ostatní budu uvádět již bez důkazu s odvoláním na doporučenou studijní literaturu. Položme nyní $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Tento krok si můžeme dovolit, protože mluvíme stále o limitech a ty nezávisí na hodnotách funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v bodě x_0 . Význam dokazované věty se proto nikterak nezmění! Vzhledem k předpokladům věty, kterou chceme dokázat, jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité. Platí totiž, že $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0 = f(x_0)$.

Mějme ještě číslo $\delta > 0$ takové, že pro libovolnou hodnotu $x \in (x_0; x_0 + \delta) = P^+(x_0)$ má výraz

$\frac{f'(x)}{g'(x)}$ smysl. V tomto intervalu musí proto existovat vlastní derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ a navíc

$g'(x) \neq 0$. Zvolme nyní libovolné $x \in P^+(x_0)$. Potom budou obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ spojité v každém bodě intervalu $\langle x_0; x \rangle$, mají vlastní derivaci v každém bodě intervalu $(x_0; x)$ a derivace funkce $g(x)$ je nenulová. Podle věty o střední hodnotě (viz. kapitoly týkající se



derivací) bude existovat číslo $a \in (x_0; x)$ takové, že platí $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$. Na

$P^+(x_0)$ má pravá strana rovnosti limitu rovnou $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a proto má tutéž limitu i strana levá uvažované rovnosti. Analogicky bychom provedli důkaz i pro levostrannou a oboustrannou limitu.

Podívejme se nyní na příklad následující limity. Vyšetřeme nyní $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Zřejmě platí, že $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Jedná se tedy o limitu typu $0/0$. Aplikujeme l'Hospitalovo

pravidlo a můžeme psát $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$.

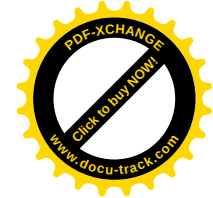
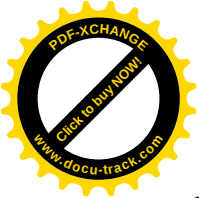
L'Hospitalova pravidla můžeme použít také pro vyšetřování limit, které vedou na neurčitě výrazy typu ∞ / ∞ . Určujeme limitu podílu dvou funkcí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, přičemž $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$. V následující definici můžeme jít ještě dále. Bude totiž stačit pouze ten předpoklad, že $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$. O funkci $f(x)$ není dále třeba předpokládat nic. Dokonce nemusí mít funkce $f(x)$ v bodě $x \rightarrow x_0$ limitu!

Definujme tedy, necht' je $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$. Dále necht' existuje vlastní nebo nevlastní limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Potom také existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Totéž pro $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ a $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$!

Důkaz této věty ukáží v náznaku, jeho precizní provedení je v knize „Úvod do počtu diferenciálního“ od Prof. V. Jarníka a ve zkrácené podobě také ve skriptech „Diferenciální počet I“ od autorů Z. Jankovského a L. Průchy, ČVUT, Praha 1994.

Protože existují limity $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$, musí existovat také nějaké číslo $\delta > 0$ takové, že na intervalu $(x_0; x_0 + \delta)$ existují derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ a navíc, že $g'(x) \neq 0$ a $g(x) \neq 0$. Z věty o střední hodnotě vyplývá, že pokud jsou dvě čísla x a x_1 taková, že $x_0 < x < x_1 < x_0 + \delta$, existuje také číslo $\varepsilon \in (x; x_1)$, pro které platí rovnost:

$$f(x) - f(x_1) = [g(x) - g(x_1)] \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$



Celou rovnost dělíme číslem $g(x)$ a dostáváme po jednoduchých úpravách:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left[1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right] \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} + \frac{f(x_1)}{g(x)}.$$

Dále uvažujme, pokud totiž zvolíme x_1 dostatečně blízko x_0 , potom bude také číslo ε blízko čísla x_0 a tedy hodnota zlomku $\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$ se bude blížit hodnotě $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Jestliže ještě zvolíme

číslo x blíže číslu x_0 , bude hodnota $|g(x)|$ velká a tak se bude hodnota podílu $\frac{f(x_1)}{g(x)}$ blížit

nule a hodnota hranaté závorky v posledně uvedené rovnosti bude blízka jedničce. Z toho jasně vyplývá následující rovnost:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow x_0} \left\{ \left[1 - \frac{g(x_1)}{g(x)} \right] \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} + \frac{f(x_1)}{g(x)} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow x_0} \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow x_0} \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Tím je definice dokázána. Nutno podotknout, že analogicky by proběhl důkaz i pro levostrannou a pravostrannou limitu.

L'Hospitalovo pravidlo můžeme také použít v případě, že budeme vyšetřovat limity v nevlastních bodech. I pro tyto případy je l'Hospitalovo pravidlo definováno a platí naprosto stejné věty jen s tím rozdílem, že symboly $\lim_{x \rightarrow x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-}$ nahradíme v definicích symboly

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ a } \lim_{x \rightarrow -\infty}.$$

L'Hospitalovo pravidlo můžeme při vyšetřování limit také řetězit. To znamená, že jej můžeme použít i několikrát po sobě na již jednou derivované funkce. Toto použití nám umožňuje věta, kterou si již dokazovat nebudeme, ale jejíž užití si ukážeme na příkladech.

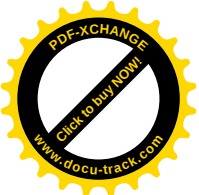
Mějme $n \in \mathbb{N}$ a nechť také existují vlastní derivace $f^{(k)}(x_0)$, $g^{(k)}(x_0)$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Položme ještě rovnosti $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ pro všechna $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ s tím, že $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Za těchto předpokladů platí rovnost

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Podívejme se nyní na příklad. Vyšetřeme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3}$. Hned je zřejmé, že se jedná o

limitu typu $0/0$, protože $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$. Tuto limitu budeme tedy řešit pomocí

l'Hospitalova pravidla. Především opět, že jsme trochu předběhli látku, budeme totiž



používat derivace. V tuto chvíli derivované funkce předkládám k věření. Je možné zde přeskočit o několik stránek dále, problematiku derivací zběžně nastudovat a pak se na toto místo vrátit.

Takže podle l'Hospitalova pravidla platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin^2 x]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{3x^2}. \text{ I nyní se však jedná o limitu typu } 0 / 0.$$

Budeme v užití l'Hospitalova pravidla pokračovat. Platí dále

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2 \cdot \sin x \cdot \cos x]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{6x}.$$

ze základní vztahů goniometrických funkcí, totiž že $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Bude tedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos 2x}{6x}.$$

Toto již ale není limita typu $0 / 0$ a je možné ji řešit úvahou: pro $x \rightarrow 0^+$ bude číselník v limitním případě roven 2, zatímco jmenovatel zlomku

v limitě bude velmi malé, kladné, avšak nenulové číslo. Bude tedy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot \cos 2x}{6x} = +\infty$. Pro

$x \rightarrow 0^-$ bude situace odlišná. Číselník bude opět roven v limitním případě číslu 2, ale

jmenovatel bude velmi malé, záporné a nenulové číslo. Proto bude $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cdot \cos 2x}{6x} = -\infty$.

Z toho vyplývá, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3}$ neexistuje!

Mějme další příklad. Vyšetřeme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x}$. Jedná se o limitu typu ∞ / ∞ a proto

užijeme l'Hospitalova pravidla a za použití jednoduchých úprav můžeme psát:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln \sqrt{x}]'}{[x]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0. \text{ Je tedy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x} = 0$$

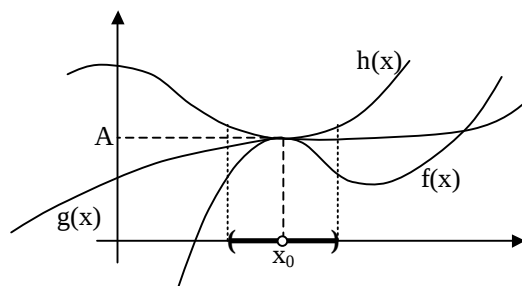
Vypočítejme nyní $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}$. Zde se bude jednat o limitu typu $0 / 0$. Aplikací

l'Hospitalova pravidla postupně za použití jednoduchých úprav dostáváme ($\cos \pi = -1$):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sin \pi x]'}{[\ln x]'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cdot \cos \pi x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} [\pi x \cdot \cos \pi x] = -\pi. \text{ Je proto } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\ln x} = -\pi.$$

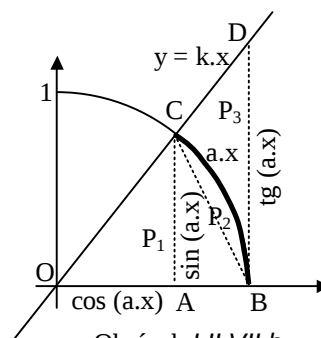
V předcházejících odstavcích jsme se věnovali výpočtu limit podílu dvou funkcí, které vedly na neurčitý výraz buď typu $0/0$ a nebo ∞/∞ . Nyní si rozebereme případy limit neurčitých výrazů při vyšetřování limity rozdílu, součinu a součtu dvou funkcí. Platí, že limita součtu, respektive součinu, respektive rozdílu dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ je rovna součtu, respektive součinu, respektive rozdílu limit těchto funkcí. Takže nám mohou dělat potíže jen limity nevlastní.

Vraťme se ještě na moment k $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, respektive obecně k limitě $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$, kde $a \in \mathbb{Z}$. Definiční obor této funkce jsou všechna reálná čísla, kromě 0 . Jedná se o limitu typu $0/0$, kterou bychom mohli bez problémů vyřešit l'Hospitalovým pravidlem. Zkusme na něj na chvíli zapomenout a pokusme se přemýšlet. Tento odstavec by spíše patřil do kapitoly I.II.III, nicméně jej uvádím až zde kvůli návaznosti na řešení neurčitých výrazů. Právě tam se následující výpočetní aparát s výhodou používá. Jedná se o větu o limitě sevřené funkce. Mějme definované funkce $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, kde $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$. Dále předpokládejme, že existuje takové prstencové okolí bodu x_0 , že pro všechny hodnoty $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Potom existuje také limita funkce $g(x)$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, tj. existuje limita funkce $g(x)$ a ta je rovna limitám funkcí $f(x)$ a $h(x)$. Obrázek I.II.VII.a. nám lépe objasní smysl této věty. Pozor, tato věta nic nepředpokládá o funkcích $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$ mimo prstencové okolí bodu x_0 !!!

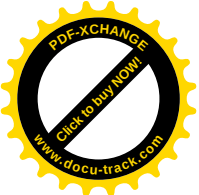


Obrázek I.II.VII.a

A nyní přejdeme k řešení zadané limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$. K tomu účelu pro lepší pochopitelnost si nakreslíme obrázek I.II.VII.b. Protože je zkoumaná funkce funkcí sudou (podílem dvou lichých funkcí je funkce sudá), stačí nám vyšetřovat situaci jen v I. kvadrantu. Jedná se o jednotkovou kružnici (respektive její část) a graf lineární funkce $y = k \cdot x$, kde $k = \operatorname{tg}(a \cdot x)$. Vznikly nám trojúhelník $\triangle OBC$, kruhová výseč OBC s obloukem BC a konečně trojúhelník $\triangle OBD$, jejichž obsahy jsou postupně P_1 , P_2 a P_3 . Pro ně jistě platí nerovnost $P_1 \leq P_2 \leq P_3$. Tyto obsahy spočteme z jednoduchých vztahů: $P_1 = \frac{1}{2} \cdot \sin(a \cdot x)$, $P_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x$, $P_3 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(a \cdot x)$. Dosadíme tyto výrazy do dané nerovnosti: $\frac{1}{2} \cdot \sin(a \cdot x) \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot x \leq \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(a \cdot x)$.



Obrázek I.II.VII.b



Můžeme krátit $\frac{1}{2}$ a celou nerovnost vydělíme výrazem $\sin(a \cdot x)$ – to si dovolit můžeme, neboť jsme v hodnotách blízkých nule avšak nenulových!!! Po úpravách dostáváme tuto nerovnost

ve tvaru: $1 \leq \frac{a \cdot x}{\sin(a \cdot x)} \leq \frac{1}{\cos(a \cdot x)}$. Nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$1 \geq \frac{\sin(a \cdot x)}{a \cdot x} \geq \cos(a \cdot x)$, kterou jsme dostali umocněním původní nerovnosti $^{-1}$. Dále

násobíme hodnotou a a dostáváme výraz: $a \geq \frac{\sin(a \cdot x)}{x} \geq a \cdot \cos(a \cdot x)$. Pro hodnoty x blízké

nule bude mít nerovnost tvar $a \geq \frac{\sin(a \cdot x)}{x} \geq a$ a podle věty o limitě sevřené funkce tedy musí

být $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$. Tak pro $a = 1$ dostáváme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Poznámka na závěr tohoto

odstavce, větu o limitě sevřené funkce si zde dokazovat nebudeme. Důkaz spočívá v nalezení kladného čísla δ , které definuje prstencového okolí bodu x_0 takové, že pro všechny body $x \in P(x_0)$ jsou splněny všechny nerovnosti vyplývající z předpokladu existence limit funkcí $f(x)$ a $h(x)$ a pak jestliže platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ na $P(x_0)$, musí být nerovnost definující limitu splněna i pro funkci $g(x)$. Její limita tedy existuje a je rovna právě limitám funkcí $f(x)$ a $h(x)$. Blíže viz. „Úvod do počtu diferenciálního“ Prof. Jarníka.

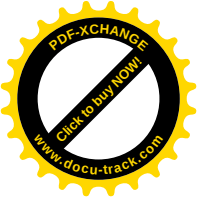
Podívejme se nyní na součin dvou funkcí a jeho limitu. Je zřejmé, že pokud $\lim f(x) \neq 0$ (Vynechávám zde znamení $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$ a $x \rightarrow -\infty$ protože v tuto chvíli na něm nezáleží. Následující věty budou platit pro všechny tyto možnosti.) a $\lim |g(x)| = +\infty$, pak $\lim |f(x) \cdot g(x)| = +\infty$. Problém nastane ve chvíli, kdy $\lim f(x) = 0$. Tehdy totiž dostáváme limitu typu $0 \cdot \infty$, což je další z neurčitých výrazů.

Máme nyní dně možnosti. Je zřejmé, že pokud je $\lim |g(x)| = +\infty$, pak je $\lim [1 / g(x)] = 0$. Stačí nám nyní vyšetřovanou limitu přepsat ve tvaru

$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim \left[\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \right]$ a změnit tak typ neurčitého výrazu na limitu $0 / 0$ a dále ji řešit

pomocí l'Hospitalova pravidla.

V některých případech je také možno použít obměnu této úpravy, která vychází z toho, že pokud $\lim f(x) = 0$, potom jistě $\lim |1 / f(x)| = +\infty$. Můžeme pak vyšetřovanou limitu



přepsat na tvar $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim \left[\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \right]$ a změnit tak typ neurčitěho výrazu na limitu

∞ / ∞ a dále řešit opět pomocí l'Hospitalova pravidla.

Ukážeme si na následujícím příkladě, že ne vždy je možné použít obou způsobů úprav limit typu $0 \cdot \infty$. V některých případech je výhodnější použít první naznačený způsob a jindy ten druhý. Vyšetřeme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x})$. Je zřejmé, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Jedná se tedy o limitu typu $\infty \cdot 0$. Na ukázkou zde provedu obě možnosti úprav. Nejprve se budeme věnovat té první zmíněné, převedeme vyšetřovanou limitu na typ $0 / 0$. Bude platit $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x}) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^{-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{[e^{-x}]'}{[x^{-2}]'} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-e^{-x}}{-2x^{-3}} \right).$$
 I toto je limita typu $0 / 0$, ale je z derivace vidět,

že bychom se pomocí l'Hospitalova pravidla výsledku nedočkali. Čitatel bude až na znaménka stejný (budou se střídát) a ve jmenovateli bude x ve stále nižší mocnině, nikdy ne v nulté! Je tedy vidět, že úpravou této konkrétní limity typu $0 \cdot \infty$ na typ $0 / 0$ mnoho nezmůžeme. Zkusme tedy druhou možnost, totiž převést zkoumanou limitu na neurčitý výraz typu ∞ / ∞ .

Tedy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} \right)$. Toto je již limita typu ∞ / ∞ a můžeme aplikovat l'Hospitalovo

pravidlo. Platí $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x^2]'}{[e^x]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right)$. To je stále ještě limita typu ∞ / ∞ , ale výraz

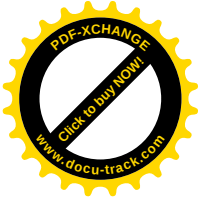
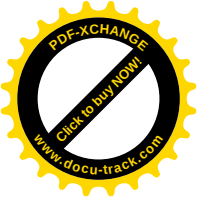
v čitateli snížil stupeň své mocniny o jedničku. Je zřejmé, že další aplikace l'Hospitalova

pravidla povede již k cíli. Dostáváme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[2x]'}{[e^x]'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x} \right) = 0$. Platí tedy, že

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x}) = 0.$$

Dostáváme se k součtu a rozdílu dvou funkcí. Použijeme nyní toho, že rozdíl je možné převést na součet tak, že u menšitele změníme znaménko a nebo znaménko změníme u menšence a vytkneme -1 . To znamená, že $[f(x) - g(x)] = [f(x) + (-g(x))]$ a nebo $[f(x) - g(x)] = (-1)[(-f(x)) + g(x)]$.

Takže pokud $\lim f(x) = +\infty$ a $g(x) = -\infty$, k neurčitěmu výrazu vede $\lim [f(x) + g(x)]$. Podobně pokud $\lim f(x) = +\infty$ a $g(x) = +\infty$, k neurčitěmu výrazu vede $\lim [f(x) - g(x)]$. V obou



případech se bude jednat o neurčitý výraz typu $\infty - \infty$ (je zřejmé, že limity typu $\infty + \infty$, $-\infty - \infty$, $\pm k + \infty$ a $\pm k - \infty$, kde $k \in \mathbb{R}$, nejsou neurčitými výrazy!).

Mějme, jak už bylo naznačeno, $\lim f(x) = \infty$ a $\lim g(x) = \infty$. Potom

$$\lim [f(x) - g(x)] = \lim \left[\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right] = \lim \left[\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}} \right].$$
 Poslední výraz nyní představuje

limitu typu $0/0$ a můžeme pro její vyřešení použít l'Hospitalovo pravidlo. Výraz se ještě zjednoduší, zavedeme-li označení $\varphi(x) = 1/f(x)$ a $\psi(x) = 1/g(x)$. Potom má se jedná o

$$\lim [f(x) - g(x)] = \lim \left[\frac{\psi(x) - \varphi(x)}{\psi(x) \cdot \varphi(x)} \right].$$

Použití právě uvedeného postupu si ukážeme na jednoduchém příkladě. Vyšetříme

limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x^4} \right)$. Je vidět, že se jedná o limitu typu $\infty - \infty$. Postup řešení bude proto

následující: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 - 2x^2}{2x^2 \cdot x^4} \right)$, což je již limita typu $0/0$ a můžeme použít

l'Hospitalova pravidla (funkce $\varphi(x) = 2x^2$ a $\psi(x) = x^4$).

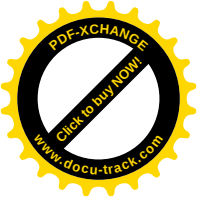
$$\text{Takže } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^4 - 2x^2}{2x^2 \cdot x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x^3 - 4x}{2(2x^5 + 4x^5)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x^3 - 4x}{12x^5} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{12x^2 - 4}{60x^4} \right).$$
 Limita

čitatele zlomku je rovna -4 . Půjdeme-li s hodnotou x k nule (zleva i zprava) bude hodnota čtvrté mocniny blízka nule (nikdy však ne rovna nule) a bude to vždy kladné číslo. To

znamená, že limita celého výrazu bude $-\infty$. Můžeme tedy psát $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x^4} \right) = -\infty$. Tento

klad by nemusel být řešen popsáním způsobem, stačilo by jen oba zlomky sečíst (společný jmenovatel by byl $2x^4$) a pak provést posledně udělanou úvahu. Nicméně si myslím, že příklad je velmi průhledný a proto jsem jej zde uvedl.

Na další neurčité výrazy vede vyšetřování limity $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^{g(x)}]$. Protože se ale pohybujeme nad reálným tělesem, musíme, stejně jako v kapitole I.II.VI, předpokládat, že $f(x) > 0$! Jedná se pak o limity typu 0^0 , ∞^0 a 0^∞ . Tuto limitu převedeme na tvar $\lim_{x \rightarrow x_0} [e^{g(x) \ln f(x)}]$ a řešíme ji jako limitu složené funkce. To znamená, že nejprve vyřešíme $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)] = y_0$ a potom $\lim_{y \rightarrow y_0} [e^y] = A$. Pokud existuje hodnota y_0 , existuje také



$\lim_{y \rightarrow y_0} [e^y]$ a to vždy! To ale znamená, že vyšetřování limity $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^{g(x)}] = \lim_{x \rightarrow x_0} [e^{g(x) \ln f(x)}]$

přejde na vyšetřování limity součinu $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)]$. Jediným neurčitým výrazem těchto

limit je případ limity typu $0 \cdot \infty$ a není problém nahlédnout, v jakým konkrétních případech neurčitý výraz $0 \cdot \infty$ můžeme dostat. Totiž v případech, kdy $\lim g(x) = 0$ a zároveň $\lim |\ln f(x)| = +\infty$ (pro $\lim f(x) = 0$ nebo $\lim f(x) = +\infty$) a nebo tehdy, když $\lim |g(x)| = +\infty$ a zároveň $\lim \ln f(x) = 0$ (pro $\lim f(x) = 1$).

Takže limity typu 0^0 , ∞^0 a 0^∞ řešíme vždy převodem na limity typu $0 \cdot \infty$ pomocí vlastností přirozených logaritmů a řešení tohoto typu neurčitých výrazů jsme již rozpracovali výše. Je samozřejmě možné použít i dekadických logaritmů nebo i logaritmů s obecným základem, ale vzhledem k možnému použití l'Hospitalova pravidla (a tedy derivací) v následujícím výpočtu doporučuji využívat logaritmů přirozených.

Postup si ukážeme na příkladě. Vrátime se k limitě funkce $f: y = x^x$, tentokrát však v bodě $x \rightarrow 0^+$. Tedy máme vyšetřit limitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$. Pomocí přirozených logaritmů přepíšeme

tuto limitu (evidentně typu 0^0) na tvar $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$ a podle věty o limitě složené funkce nejprve řešíme limitu exponentu: $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln x]$, což je limita typu $0 \cdot \infty$. Takže máme

$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ limitu typu ∞ / ∞ a můžeme použít l'Hospitalova pravidla. Dostáváme

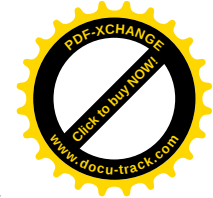
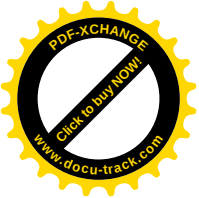
po derivování čitatele i jmenovatele toto: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-x] = 0$. Je tedy $y_0 = 0$ a

můžeme vyšetřit limitu $\lim_{y \rightarrow 0} e^y = e^0 = 1$. Můžeme proto psát $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.

I.III Derivace funkce jedné proměnné

I.III.I Zavedení pojmu derivace a její geometrický a fyzikální význam

Před více než třemi stoletími zavedli pojem derivace (zcela na sobě nezávisle) dva vědci (jeden byl více fyzik a druhý spíše matematik), jejichž jména jsou dnes notoricky známa. Příběh s jabloní, pod níž si údajně I. Newton (1642 – 1727) lehl a jejíž jablko na něj spadlo, zná snad každý. Tato událost jej pak přivedla na myšlenky o pohybu těles a stanovení



okamžitých rychlostí. Druhým byl G. V. Leibnitz (1646 – 1716), kterého na myšlenku zavést derivace přivedlo studium průběhů funkcí a problematika určení tečen k jejich grafům.

Ale nejprve odhlédněme od samotného pojmu derivace (ten si zavedeme až za chvíli) a trochu přemýšlejme. Mají-li se věci a děje kolem nás vyvíjet, musí nutně docházet ke změnám. Automobil se rozjíždí a jeho rychlost se tak zvětšuje. Stojíme například před problémem, jak zjistit okamžitou rychlost auta v nějakém čase a nebo chceme zjistit, jak rychle se jeho rychlost mění. Nebo studujeme průběh nějaké funkce a nebude nám stačit pouze zjištění, že je tato funkce definována v okolí nějakého bodu, že je spojitá a nebo že je rostoucí (případně klesající). Bude nás také zajímat jak rychle se v daném bodě mění funkční hodnoty v závislosti na změně argumentu studované funkce (tato změna je vyjádřena velikostí sklonu tečny ke grafu funkce ve studovaném bodě, tj. směrnici tečny). Dalším problémem může být nalezení rovnice tečny ke grafu studované funkce v nějakém zvoleném bodě, atd., atd., ...

Pojďme se nyní podívat na náhled z pohledu fyziky. Pohybová problematika a nalezení okamžité rychlosti nějakého pohybujícího se bodu (případně automobilu) je jedním z dobrých a průhledných příkladů. Mějme bod, který se pohybuje z místa A do místa B . Pohyb nechť není přímočarý a rovnoměrný. To znamená, že se rychlost v průběhu cesty z A do B bude spojitě (nikoliv skokově) měnit. Ujetá vzdálenost bude funkcí času t a bude se tedy jednat o funkci s : $y = s(t)$. Čas počítejme ve vteřinách a vzdálenost například v metrech. Zvolme nyní dva libovolné okamžiky t_0 a t_2 takové, že $t_0 < t_2$. K nim pak přísluší ujeté vzdálenosti $s(t_0)$ a $s(t_2)$, pro které také platí, že $s(t_0) < s(t_2)$. Průměrnou rychlost na úseku $s(t_2) - s(t_0)$ můžeme vypočítat ze vztahu $\frac{s(t_2) - s(t_0)}{t_2 - t_0}$. Zvolme nyní ještě libovolný jiný

okamžik t_1 takový, že $t_1 = t_0 + \Delta t$, kde $\Delta t \neq 0$. Potom opět určíme průměrnou rychlost na úseku $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ pomocí podobného zlomku, jako v přecházejícím případě $\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$. Když bude hodnota Δt dostatečně blízka nule, bude se hodnota tohoto

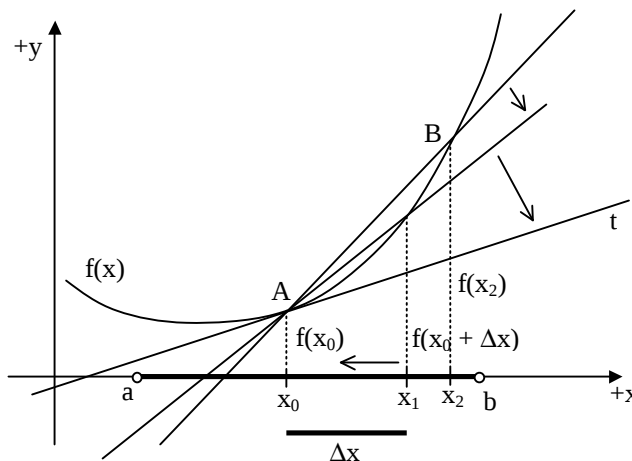
zlomku limitně blížit k okamžité rychlosti pohybujícího se bodu. Takže limitu $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ nazveme okamžitou rychlostí bodu v okamžiku t_0 .

Podívejme se nyní na stejnou problematiku z pohledu vyšetřování průběhu funkce f . Mějme tedy funkci f : $y = f(x)$ a předpokládejme, že je na nějakém intervalu $(a; b)$ spojitá. Kromě toho nás bude také zajímat, zda je zkoumaná funkce monotónní, zda je sudá nebo lichá, jestli je omezená či nikoliv, atd. Důležitou vlastností funkce f bude i to, jak rychle

rostou (respektive klesají) funkční hodnoty $y = f(x)$ této funkce v závislosti na změně argumentu x .

Zvolme tedy libovolné dva body x_0, x_2 takové, že $x_0 < x_2$ a $x_0, x_2 \in (a; b)$. Body x_0 a x_2 jsou tedy vnitřními body intervalu $(a; b)$. V těchto bodech na ose x zvolené kartézské soustavy souřadnic Oxy sestrojíme pořadnice, jejichž délky budou $f(x_0)$ a $f(x_2)$. Body $A = [x_0; y_0 = f(x_0)]$ a $B = [x_2; y_2 = f(x_2)]$

pak jistě leží na grafu zkoumané funkce f . Podobně jako v přecházejícím příkladě, průměrný nárůst funkčních hodnot $f(x)$ v závislosti na růstu argumentu x funkce f v intervalu od x_0 do x_2 je dán zlomkem $\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$. Jedná se vlastně o



Obrázek I.III.1.a

směrnici sečny grafu funkce f definované body A a B . Zvolme nyní ještě jeden libovolný bod x_1 na ose x výše zmíněné

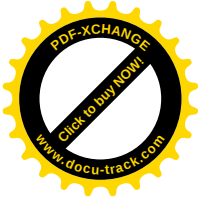
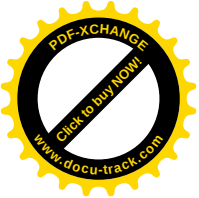
soustavy souřadnic takový, že $x_1 = x_0 + \Delta x$. Hodnota Δx budiž nenulová! Potom průměrný přírůstek funkčních hodnot $f(x)$ v závislosti na růstu argumentu x funkce f na intervalu od x_0 do $x_0 + \Delta x$ je dán podobným zlomkem jako u příkladu z hlediska fyziky, totiž $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. I zde, pokud bude hodnota Δx dostatečně blízka nule, bude se hodnota

tohoto zlomku limitně blížit k hodnotě okamžitého přírůstku funkčních $f(x)$ v bodě x_0 . To znamená, že limitu $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nazveme okamžitým přírůstkem funkčního

hodnot $f(x)$ funkce f v bodě x_0 . Celá situace je na obrázku I.III.1.a. Geometricky je tato limita rovna směrnici tečny t ke grafu funkce sestrojené v bodě x_0 !

Podívejme se nyní na limity z obou příkladů. Formálně jsou totiž úplně stejné. Bylo by proto účelné těmto limitám přisoudit zvláštní význam. Při označení Δt respektive Δx symbolem h , je možné obě limity formalizovat do tvaru $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. A pokud

existuje tato limita, nazveme ji derivací funkce f v bodě x_0 a geometricky se bude jednat o směrnici tečny t ke grafu funkce f v právě bodě x_0 !



Derivaci můžeme definovat takto: necht' existuje funkce $f: y = f(x)$ a číslo x_0 . Potom limitu $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 . Derivací funkce f v bodě x_0 zprava pak nazýváme limitu $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a derivací funkce f v bodě x_0 zleva limitu $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Je zřejmé, že pokud neexistuje nějaká z právě uvedených limit, říkáme postupně, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci, nebo funkce f nemá v bodě x_0 derivaci zprava a nebo funkce f nemá v bodě x_0 derivaci zleva. Navíc výše zmíněné limity mohou být jak limity vlastní, tak i nevlastní a potom hovoříme o derivacích vlastních případně derivacích nevlastních.

Zkusme se podívat na příklad. Vypočítáme nyní derivace funkce $\sin x$. Dosadíme nyní do limity $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a po dosazení dostáváme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h}$. Nyní nám nezbývá, než tuto limitu postupně vyřešit:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 + h \cdot \cos x_0 - \sin x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \cos x_0}{h} = \cos x_0 \end{aligned}$$

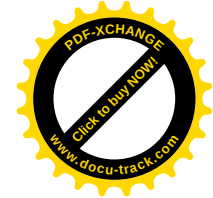
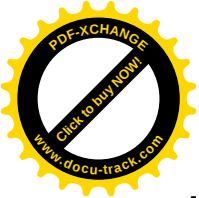
Můžeme tedy psát, že derivace funkce $y = \sin x$ v bodě x_0 je rovna $\cos x_0$. Je tedy vidět, že nalézt derivaci nějaké funkce není nic jiného, než vyšetřit jistou limitu!

V našem příkladě bude ke zvolenému x_0 vypočtena derivace funkce $\sin x$ jako číslo $\cos x_0$. Jedná se tedy o číslo.

Nic se ale nestane, jestliže místo konkrétního bodu x_0 budu uvažovat nějaký libovolný bod x . Limita, která definuje derivaci, tak přejde na tvar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (podobně pro symboly $\lim_{h \rightarrow 0^+}$ a $\lim_{h \rightarrow 0^-}$), v němž místo hodnoty x_0 používám symbol x . Kdybych totiž v předcházejícím příkladě zvolil jiné x_0 , vyšetřovaná limita by měla jinou hodnotu. To ale znamená, že hodnota derivace nějaké funkce závislá na volbě x_0 a proto se obecně jedná o funkci argumentu x !

Derivace se obvykle označují následujícími znaky f' , $f'(x)$, $[f(x)]'$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Derivace funkce $f(x)$ zprava respektive zleva označujeme pak f'_+ , $f'_+(x)$ respektive f'_- , $f'_-(x)$.



I.III.II Základní derivační vzorce

Pojem derivace jsme si v předcházející kapitole nadefinovali a získali jsme také pojem o tom, co vlastně derivace geometricky i fyzikálně znamená. Také jsme si zavedli symboly pro zápis derivací.

Bylo ukázáno, že vypočítat derivaci nějaké funkce f v bodě x_0 znamená vyšetřit jistou limitu zlomku (říká se mu diferenční podíl). Kdybychom ale měli pokaždé, když potřebujeme vypočítat derivaci nějaké funkce, počítat onu limitu, bylo by to nešikovné a zdlouhavé. Je tedy nasnadě, že je třeba zavést výpočetní aparát, který by umožňoval velmi rychlý a jednoduchý výpočet derivací. A právě takovým aparátem jsou derivační vzorce a samozřejmě další pravidla derivování.

Derivační vzorce odvozujeme přímo z definice derivace, tedy z limity diferenčního zlomku (někdy také podílu). Symbol x_0 v limitě nahradíme obecným bodem x zkoumané funkce (to si dovolit můžeme, viz. předcházející kapitola) a budeme řešit limitu $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ obecně pro nějakou zkoumanou funkci. Nyní si odvodíme několik základních derivačních vzorců a pak na konci této kapitoly je uspořádám do přehledné tabulky.

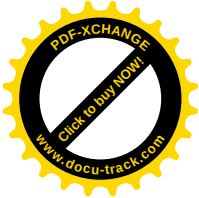
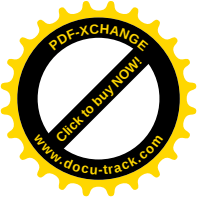
Derivace funkce $f: y = c, c \in \mathbb{R}$: jedná se tedy o konstantní funkci a nás zajímá její derivace. Dosadíme tedy do limity a tuto limitu propočítáme: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$. Konstantní funkce nabývá totiž pro libovolnou hodnotu argumentu stále stejné funkční hodnoty, tj. hodnoty c ! A máme tak první derivační vzorec, který můžeme zapsat jako $[c]' = 0$, nebo-li derivace konstanty je nulová! To je zřejmé i z geometrického významu derivace, jedná se totiž o tangens úhlu, který svírá tečna ke grafu funkce s kladnou osou x . Ten je ale nulový a jeho tangens musí být proto identicky roven nule.

Derivace funkce $f: y = x, D(f) = \mathbb{R}$: protože se jedná vlastně o osu I. a III. kvadrantu, měla by být tato derivace rovna 1 (jedná se o $\tan 45^\circ$). Dosadíme do limity a řešíme:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1. \text{ Můžeme tedy psát, že } [x]' = 1.$$

Derivace funkce $f: y = x^n, D(f) = \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$: v tomto případě se již nebude jednat o tak jednoduchou derivaci a jednoduchý výpočet. Dosadíme do limity a počítáme:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \quad \text{první} \quad \text{dvojčlen} \quad \text{rozvineme} \quad \text{podle} \quad \text{binomické} \quad \text{věty}$$



$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} = , \text{ kde je kombinační}$$

číslo $\binom{n}{0}$ rovno jedné. Hodnota x^n se odečtou a ze zbývajících členů vytkneme h . Tak

$$\text{dostáváme} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1} \right]}{h} = \text{ a dále hodnotu } h$$

$$\text{krátíme} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1} \right] = , \text{ což je limita součtu}$$

postupně n členů. Od druhého členu včetně obsahují proměnnou h a tak je jejich limita

$$\text{nulová. Takže dostáváme} = \lim_{h \rightarrow 0} \binom{n}{1}x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}. \text{ To je konečný výsledek a můžeme tak psát,}$$

$$\text{že } [x^n]' = n \cdot x^{n-1}.$$

Derivace funkce $f: y = x^n, D(f) = \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^-$: jedná se o podobnou funkci té předcházející, kde však exponent náleží do celých záporných čísel. Derivaci této funkce si odvodíme v kapitole I.III.III až si povíme o derivaci podílu dvou funkcí.

Derivace funkce $f: y = \sin x, D(f) = \mathbb{R}$: stejně jako v přecházejících příkladech odvození derivačních vzorců i zde dosadíme do již klasické limity diferenčního podílu a

$$\text{aplikací součtových vzorců dostáváme: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

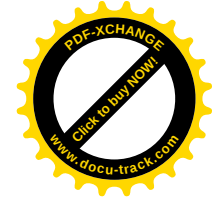
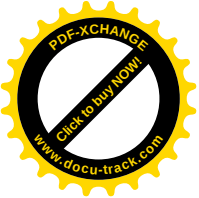
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \text{ uvědomme si, že pro velmi malé hodnoty } h \text{ (rozuměj}$$

v obloukové míře, v radiánech) platí tyto rovnosti: $\cos h = 1$ a $\sin h = h$. Takže dostáváme

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x + h \cdot \cos x - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \cos x}{h} = \cos x. \text{ Můžeme tedy psát, že } [\sin x]' = \cos x, \text{ což}$$

je další ze základních derivačních vzorců.

Derivace funkce $f: y = \cos x, D(f) = \mathbb{R}$: odvození je zcela analogické s předcházejícím včetně použitého postupu (s tím rozdílem, že se použije součtový vzorec pro $\cos(x+h)$). Proto jej zde nebudu provádět a ponechávám to na pilném studentovi. Výsledkem bude derivační vzorec $[\cos x]' = -\sin x$.



Derivace funkce $f: y = e^x$, $D(f) = \mathbb{R}$: dosadíme do limity definující derivaci a dostáváme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = e^x$. Limita zlomku $\frac{(e^h - 1)}{h}$ pro $h \rightarrow 0$ je totiž identicky rovna jedné! Můžeme tedy psát $[e^x]' = e^x$.

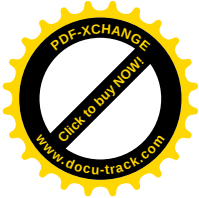
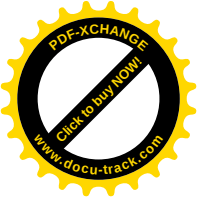
Předcházejících několik základních derivačních vzorců shrnu nyní do přehledné tabulky. V dalších kapitolách je budeme velmi potřebovat:

Funkce	a její derivace
c	0
x	1
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x

I.III.III Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí

V předcházející kapitole jsme si odvodili několik základních derivačních vzorců. Ty budeme potřebovat pro odvození dalších. K tomu abychom odvodili i další vzorce pro rychlý výpočet derivací je třeba, abychom znali více. Jak budou derivace vypadat, jestliže budeme derivovat součet dvou funkcí? Nebo jejich rozdíl případně součin či podíl, atd.?

Dejme se do toho. Mějme nějakou funkci $h(x) = f(x) + g(x)$ a chceme ji derivovat, tj. určit její derivaci. Při odvození opět vyjdeme z definice derivací, totiž z nám již tak dobře známé limity diferenčního podílu. Zřejmě bude platit, že $h(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$, takže můžeme do limity dosadit: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - [f(x) + g(x)]}{h} =$ výraz v čitateli zlomku uspořádáme $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} =$ a dále rozdělíme na součet dvou zlomků $= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$ využijeme toho, že limita součtu dvou funkcí je součet limit obou sčítanců a dostáváme $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$. Obě tyto limity představují postupně derivace funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a můžeme proto psát, že derivace součtu dvou funkcí je rovna součtu derivací obou sčítanců. Nebo-li zapsáno matematickou symbolikou $[f(x) + g(x)]' = [f(x)]' + [g(x)]' = f' + g'$.



Podívejme se na rozdíl dvou funkcí. Mějme funkci $h(x) = f(x) - g(x)$. Využijeme analogie s předcházejícím příkladem a můžeme rovnou dosazovat a upravovat limitu diferenčního podílu:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - g(x+h) - [f(x) - g(x)]}{h} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - [g(x+h) - g(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Poslední rozdíl v rovnosti představuje rozdíl derivací funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a tudíž můžeme psát, že derivace rozdílu dvou funkcí je rovna rozdílu derivací menšíte a menšence. Symbolicky tato věta vypadá následovně: $[f(x) - g(x)]' = [f(x)]' - [g(x)]' = f' - g'$.

Jak to bude vypadat s derivací $g(x)$, která je součinem nějaké funkce $f(x)$ a konstanty $c \in \mathbb{R}$? Zřejmě platí, že $g(x+h) = c \cdot f(x+h)$ a můžeme již dosadit do limity diferenčního podílu funkce $g(x)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] =$$
$$= c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \cdot f'(x).$$

Toto odvození nám tedy říká, že při derivování součinu nějaké funkce a konstanty je možné tuto konstantu před derivací vytknout a derivovat pouze onu funkci. Nebo-li symbolicky: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot [f(x)]' = c \cdot f'$.

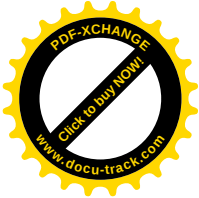
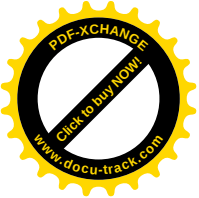
Podívejme se nyní na součin dvou funkcí a jeho derivaci. Mějme funkci $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ a ptáme se, jak vypadá derivace $[h(x)]' = [f(x) \cdot g(x)]'$. Bude zřejmě platit, že $h(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h)$ a můžeme tak dosadit rovnou do limity diferenčního podílu funkce $g(x)$. Dostáváme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

v čitateli provedeme úpravu přičtením a zase odečtením výrazu $g(x+h) \cdot f(x)$ a po jednoduchých úpravách dostáváme postupně toto řešení:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - g(x+h) \cdot f(x) + g(x+h) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$
$$= g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

kde limity představují postupně derivace funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Můžeme proto psát, že derivace součinu funkcí $f(x)$ a $g(x)$ je rovna „první funkce derivovaná násobeno druhou nederivovanou



plus první nederivovaná násobeno druhá funkce derivovaná“. Symbolicky tuto větu vyjadřuje zápis: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = f' \cdot g + f \cdot g'$.

Z těch základních operací nám zbývá už jen podíl dvou funkcí, respektive jeho derivace. Jak tedy vypadá derivace podílu dvou funkcí? Mějme funkci $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, přičemž $g(x) \neq 0$. Z předcházejících příkladů je patrná analogie odvození a proto můžeme již rovnou dosadit do limity diferenčního podílu pro funkci $h(x)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) \right]. \quad \text{Výraz v kulatých}$$

závorkách nyní sečteme: $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} \right]$ a využijeme komutativnosti

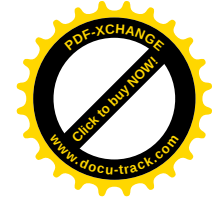
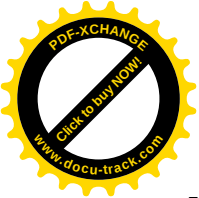
operace násobení: $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} \right]$. Nyní již stačí

v čitateli přičíst a opět odečíst součin $f(x) \cdot g(x)$ a provést následující jednoduché úpravy:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] = \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \cdot \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \cdot \left[g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) - f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \right] = \end{aligned}$$

Limity v posledním řádku představují ale derivace funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a tak můžeme psát, že:

$$= \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \cdot [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$



Výsledný vztah pro derivaci podílu dvou funkcí můžeme tedy shrnout ve větě „první funkce derivovaná násobeno funkcí druhou méně první nederivovaná násobeno derivací druhé funkce a to celé děleno čtvercem druhé funkce“. Symbolicky pak zápis tohoto derivačního

pravidla vypadá následovně:
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Těchto pět základních derivačních pravidel nyní shrneme v přehledné tabulce:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

I.III.IV Derivace složené funkce

Abychom si mohli vyvodit další derivační vzorce, je třeba definovat některá další derivační pravidla a jedním z těch nejzákladnějších je derivace funkce složené. Mějme tedy funkci $g: y = g(x)$ a jinou funkci $f: z = f(y)$. Za hodnotu argumentu y funkce f můžeme dosadit celou funkci g a dostáváme tak funkci f v předpisu $f: z = f(g(x))$. Funkce f je nyní funkcí složenou a my se budeme ptát, jak vypadá její derivace.

Prvním předpokladem je, že funkce $f(y)$ má vlastní derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$. Za druhé, že funkce $g(x)$ má také vlastní derivaci, tentokrát v bodě x_0 . Za těchto předpokladů se tedy ptáme, jak vypadá derivace funkce $f(g(x))$.

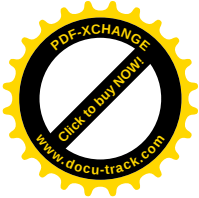
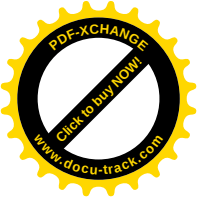
Bude se jednat o vyšetření limity

$$[f(g(x))]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{h} \quad \text{při}$$

označení $g(x_0 + h) = y = y_0 + k$, přičemž (viz výše) $g(x_0) = y_0$. Protože se h blíží k nulové hodnotě, bude se také číslo k blížit k nule. Uvědomme si, že významově je hodnota $h = x - x_0$ a hodnota $k = y - y_0$! Jinak řečeno, je h přírůstek argumentu funkce $g(x)$ a k je pak přírůstek argumentu funkce $f(y)$, což je totéž, jako přírůstek funkčních hodnot funkce $g(x)$ v závislosti na hodnotě h .

Z těchto úvah a podle výše uvedeného značení můžeme psát následující:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k} \cdot \frac{k}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k} \cdot \frac{y - y_0}{h} \right] =$$



$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f'(y_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

tak i $k \rightarrow 0$, takže si můžeme v případě první limity dovolit místo symbolu h psát k !

Takže věta o derivaci složené funkce nám říká, že „derivaci vnější funkce násobíme derivací funkce vnitřní“. Pokud máme vícenásobně složenou funkci, derivuje se řetězením tohoto pravidla. Můžeme psát pravidlo o derivaci složené funkce ve tvaru: $[z(x)]' = [f(g(x))]' = f'(y) \cdot g'(x) = f' \cdot g'$.

Zkusme nyní vypočítat derivaci funkce $y = \sin^3((x + 1)^2)$. Rozebereme zadanou funkci z hlediska řetězení vnořených funkcí. Funkce $(x + 1)$ je funkcí vnitřní, k ní je vnější funkcí její kvadrát. Dále funkce $(x + 1)^2$ je vnitřní funkcí funkce sinus. Tato je ještě vnitřní funkcí její třetí mocniny. Takže můžeme derivovat:

$$[\sin^3((x + 1)^2)]' = \underline{\underline{3 \cdot \sin^2((x + 1)^2)}} \cdot \underline{\underline{\cos((x + 1)^2)}} \cdot 2(x + 1)$$

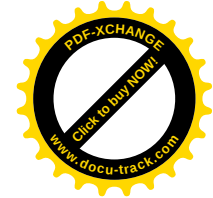
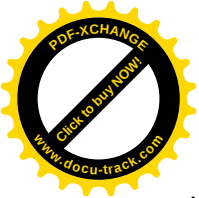
Nejpřehlednější je derivovat složené funkce směrem od vnější funkce k vnitřní tak, jak je ukázáno na příkladě. Derivace vnější funkce je podtržena dvojitě, derivace k ní vnitřní funkce je podtržena jednou čarou a konečně derivace poslední vnořené funkce je bez podtržení. Je třeba si také uvědomit, že jsme pro derivaci vnější funkce (dvakrát podtržená) a derivaci funkce nejvíce vnořené (bez podtržení) využili vzorce $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$, kde je možné za hodnotu x dosazovat libovolnou jinou funkci!

Ukážeme si derivaci složené funkce ještě na jednom příkladu. Mějme funkci $g: y = e^{[\sin(4x) - 4x]}$, kde x je z množiny všech reálných čísel. Využijeme derivace funkce podle vzorce $[e^x]' = e^x$, ale je třeba si ještě uvědomit, že samotný exponent je také funkcí argumentu x ! Takže celou funkci musíme derivovat jako funkci složenou, kde mocnina o základu e bude vnější funkce a $[\sin(4x) - 4x]$ bude vnitřní funkcí. Navíc ještě funkce $4x$ bude vnitřní funkcí sinu! Derivujme: $[e^{[\sin(4x) - 4x]}]' = e^{[\sin(4x) - 4x]} \cdot [4 \cdot \cos(4x) - 4]$. I tato funkce má jako definiční obor všechna reálná čísla, takže je vše v pořádku.

Tento příklad však považuji za jeden ze zásadních! Žádám proto studenty aby mu věnovali patřičnou pozornost!!!

I.III.V Derivace inverzní funkce

Je-li libovolná funkce funkcí prostou a navíc spojitou na nějakém intervale J , existuje k ní na tomto intervale vždy funkce inverzní. Máme tedy definovanou funkci $f: x = f(y)$, která



je prostá (tedy ryze monotónní) a spojitá na intervalu J . K funkci f existuje tedy funkce f^{-1} , pro kterou platí $H(f^{-1}) = D(f)$, $D(f^{-1}) = H(f)$ a $y = f^{-1}(x)$ pro všechna $x = f(y)$, $y \in J \subseteq D(f)$. Podívejme se nyní, jak bude vypadat derivace funkce $y = f^{-1}(x)$. Půjde o to vyšetřit následující

$$\begin{aligned} \text{limitu: } [f^{-1}(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x_0 + h) - f^{-1}(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_0 + k - y_0}{(x_0 + h) - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{f(y_0 + k) - f(y_0)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{f(y_0 + k) - f(y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k}} = \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k}}. \end{aligned}$$

uvědomit, že hodnota $h = x - x_0$, takže můžeme psát, že $h = x_0 + h - x_0$! Dále platí, že $f^{-1}(x_0 + h) = f^{-1}(x) = y = y_0 + k$, kde k je přírůstek argumentu funkce f : $x = f(y)$. Z analogie pak máme $f^{-1}(x_0) = y_0$. Blíží-li se hodnota h nule, pak se také nule blíží i hodnota k . Je možné

je proto zaměnit a psát
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(y_0 + k) - f(y_0)}{k}} = \frac{1}{f'(y_0)}.$$
 Místo

symbolu y_0 můžeme psát y a dostáváme tak vztah pro derivaci inverzní funkce:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}.$$

Použití si ukážeme na příkladu. Derivujme funkci $y = \arctg x$. Při označení $y = f^{-1}(x) = \arctg x$ dostáváme, že $x = f(y) = \tan x$. Platí, že $[f^{-1}(x)]' = 1 / f'(y)$. Takže řešení můžeme psát: $y' = [\arctg x]' = [f^{-1}(x)]' = 1 / f'(y) = 1 / [\tan y]' = \cos^2 y$. Je nutné ovšem tuto

derivaci převést zpět k proměnné x . Můžeme upravovat: $\cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} =$

$$\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y \left(1 + \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}\right)} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}.$$
 Protože podle zadání je $y = \arctg x$, musí být $x = \tan y$

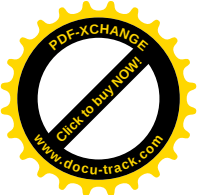
(inverzní funkce k funkci arkustangens). Dosadíme do výrazu za $\tan y = x$ a dostáváme

$$\text{konečnou podobu derivace funkce } y = \arctg x, \text{ totiž } [y]' = [\arctg x]' = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

což je zároveň další derivační vzorec!

Pomocí derivace inverzní funkce odvodíme také derivaci funkce $f: y = \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$, kterou budeme potřebovat hned v další kapitole.

Zopakujme si definici přirozeného logaritmu. Říkáme, že $y = \ln x$ právě tehdy, když $e^y = x$. Z levé strany ekvivalence dosadíme nyní za y do strany pravé a dostáváme rovnost: $e^{\ln x} = x$.



Funkce $f: y = \ln x$ je jistě funkcí prostou a spojitou na celém svém definičním oboru (kladná reálná čísla). Podle definice přirozeného logaritmu k ní proto existuje inverzní funkce $f^{-1}(y)$, pro kterou platí $f^{-1}: x = e^y$, kde $y \in \mathbb{R}$. Podle věty o derivaci inverzní funkce bude platit,

$$\text{že } f'(x) = \frac{1}{[f^{-1}(y)]}, \text{ což v našem konkrétním případě znamená, že } [\ln x]' = \frac{1}{[e^y]} = \frac{1}{e^y}.$$

Hodnota e^y je ale rovna x , takže můžeme dosadit do derivace a psát $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ pro všechna

kladná reálná čísla. A je na světě další derivační vzorec! Jak jednoduché, že?

I.III.VI Logaritmické derivování

Tento postup se používá ve chvíli, kdy je třeba určit derivaci složené funkce $h(x)$ typu $h: y = f(x)^{g(x)}$ na intervalu J , na kterém je $f(x) > 0$ (funkce $f(x)$ bude totiž po úpravě v argumentu logaritmu). Je třeba ale také předpokládat, že na intervalu J existují vlastní derivace $f'(x)$ a $g'(x)$.

Zopakujme si ještě jednou („*Repetitio est mater studeorum*“, J. A. Komenský) definici přirozeného logaritmu. Říkáme, že $y = \ln x$ právě tehdy, když $e^y = x$. Z levé strany ekvivalence dosadíme nyní za y do strany pravé a dostáváme rovnost: $e^{\ln x} = x$.

A právě pomocí této vlastnosti logaritmů můžeme upravit funkci $f(x)^{g(x)}$ na tvar, s nímž si již poradíme. Dosadíme nyní za hodnotu x celou funkci $f(x)^{g(x)}$ a dostáváme rovnost $h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln[f(x)^{g(x)}]} = e^{g(x) \ln f(x)}$. Funkci $g(x)$, která byla původně exponentem, jsme pomocí vlastností logaritmů přesunuli do součinu s logaritmem funkce $f(x)$!

Kromě této vlastnosti logaritmů využijeme také věty o derivování složených funkcí (viz. kapitola I.III.IV). Máme tedy funkci $h(x) = e^{g(x) \ln f(x)}$, kterou je třeba derivovat.

$$\text{Dostáváme } [h(x)]' = [f(x)^{g(x)}]' = [e^{g(x) \ln f(x)}]' = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right).$$

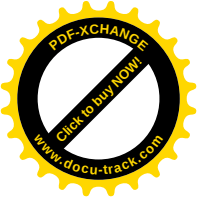
Protože je ale funkce $e^{g(x) \ln f(x)}$ rovna původní derivované funkci, můžeme za ní zpět dosadit

$$\text{a psát tak } [h(x)]' = [f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right).$$

Je-li interval $J \subseteq D(h)$, pak i v derivaci $h'(x)$ musí být $x \in J$. A to je další derivační pravidlo, které je velmi důležité!

I.III.VII Některé další derivační vzorce

Na začátek mám jednu velmi důležitou poznámku. Při výpočtu derivací je třeba vždy určovat definiční obory funkcí ve všech krocích úprav včetně konečných výsledků!!! Význam



této poznámky doložím na jednom vynikajícím příkladu, který jsem převzal ze skript „Diferenciální počet I“ od autorů Jankovského a Průchy, ČVUT, 1994. Jedná se o derivaci funkce $f: y = \ln(\cos 4x - \pi)$. Zřejmě definičním oborem této funkce budou všechna reálná čísla x vyhovující podmínce $\cos 4x - \pi > 0$. Taková reálná čísla ale neexistují takže funkce f není v oboru reálných čísel vůbec definována! Provedme ale formální derivaci podle již odvozených pravidel a postupů. Můžeme psát:

$$[\ln(\cos 4x - \pi)]' = \frac{1}{\cos 4x - \pi} \cdot (-4 \sin 4x) = \frac{4 \sin 4x}{\pi - \cos 4x}.$$

Tato naše formální derivace je ale naproti tomu definována hned pro úplně všechna reálná čísla!

Pomocí vztahů odvozených v předcházející kapitole můžeme definovat několik dalších derivačních vzorců, které se řadí mezi ty základní. V kapitole I.III.II jsme „nakousli“ derivaci této funkce $f: y = x^n$, $D(f) = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^-$. Podívejme se na ní trochu podrobněji. Exponent mocninné funkce f je záporné číslo. Položme rovnost $m = -n$. Číslo m je nyní

kladné a pomocí tohoto kroku dostáváme následující řešení. Platí, že $[x^n]' = \left[\frac{1}{x^m} \right]'$, kde ale je

(jak jsem již naznačil) číslo m kladné a dostáváme tak vlastně derivaci podílu dvou funkcí, z nichž jedna je konstantní a druhá (ta ve jmenovateli) je x^m s kladnou mocninou. Můžeme

tedy psát: $\left[\frac{1}{x^m} \right]' = \frac{0 \cdot x^m - 1 \cdot m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{m-1-2m} = -m \cdot x^{-m-1}$. Dosadíme nyní

za $-m$ z naší původní úvahy hodnotu n (podle počátečního zavedení totiž platilo, že $m = -n$) a

dostáváme $\left[\frac{1}{x^{-n}} \right]' = [x^n]' = n \cdot x^{n-1}$. Vidíme, že tento derivační vzorec je stejný jako v případě

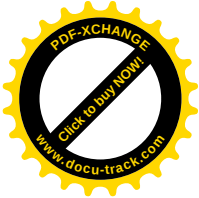
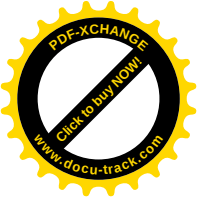
kladného exponentu! Tedy pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ platí $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$.

Další dva derivační vzorce si odvodíme z příkladu na procvičení derivací. Jedná se derivaci funkce $\tan x$ a $\cotg x$.

Začneme tou první. Zřejmě platí, že $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a tak můžeme psát, že

$[\tan x]' = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]'$ a můžeme již bez problémů derivovat, protože se nejedná o nic jiného, než

o derivaci podílu dvou funkcí, jejichž jednotlivé derivace umíme již určit. Můžeme tedy psát,



že: $\left[\frac{\sin x}{\cos x} \right]' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Takže jsme odvodili derivační vzorec pro derivaci funkce tangens, tedy $[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Podobně odvodíme derivační vzorec pro funkci kotangens. Uvědomme si, že $\cotg x = \tan^{-1} x$ a proto platí následující výpočet derivace a další úpravy:

$$\left[\frac{\cos x}{\sin x} \right]' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$
 Odvozený vzorec pro

derivaci funkce kotangens tedy je: $[\cotg x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Odvoďme další, poměrně často se vyskytující, derivační vzorec. Jedná se o derivaci funkce $f: y = \log_a x$. Pro odvození použijeme opět derivace funkce k ní inverzní, jejíž tvar a existence vychází z definice logaritmů. Tedy $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. Podle věty o derivaci

inverzní funkce pak můžeme psát: $[\log_a x]' = \frac{1}{[a^y]'} = \frac{1}{[e^{y \cdot \ln a}]'} = \frac{1}{e^{y \cdot \ln a} \cdot \ln a} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$. Využili jsme také aparátu logaritmického derivování a zpětného dosazení

z definice inverzní funkce k funkci logaritmické. Derivační vzorec má tedy tvar:

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \text{ kde } x \text{ patří do kladných reálných čísel a } a \text{ je z kladných reálných čísel}$$

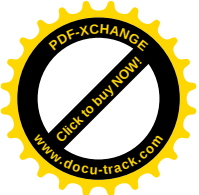
různých od jedné! Za hodnotu x je možné dosazovat libovolnou jinou funkci $f(x)$, jejíž definiční obor je shodný s definičním oborem logaritmu. Bude se pak jednat o derivaci podle právě odvozeného derivačního pravidla ale přidá se ještě derivace složené funkce! Speciálním tvarem tohoto vzorce je derivace funkce $f: y = \log x$, tedy dekadického logaritmu. Dojdeme k němu tak, že za hodnotu základu logaritmu dosadíme číslo 10 a dále upravujeme:

$$[\log x]' = \frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e 10} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\log 10}{\log e}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log e} = \frac{\log e}{x}.$$
 Považujme i tento vztah za

jeden z derivačních vzorců!

Už jsme si odvodili derivaci funkce $\arctg x$. Podívejme se nyní na $\operatorname{arccotg} x$. I zde použijeme derivace funkce inverzní. Platí totiž, že $y = \operatorname{arccotg} x$ právě tehdy, když $x = \cotg y$. Takže můžeme psát: $[\operatorname{arccotg} x]' = 1 / [\cotg y]'$. Derivujme nyní funkci $\cotg y$, tedy

$$[\cotg y]' = -\frac{1}{\sin^2 y}.$$
 Proto platí, že $[\operatorname{arccotg} x]' = -\sin^2 y$. Dále je třeba ještě provést



jednoduché úpravy a nakonec dosadit z inverzní funkce: $[\operatorname{arccotg} x]' =$
 $= -\sin^2 y = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} + 1}$. Vzhledem k tomu, že zlomek

$\cos^2 y / \sin^2 y = \cot^2 y = x^2$ (po dosazení z inverzní funkce!), dosadíme místo něj právě symbol x^2 a tak dostáváme výsledek $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$. To je další derivační vzorec!

Srovnáme-li nyní derivaci funkce $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$, můžeme psát, že $[\operatorname{arctg} x]' = -[\operatorname{arccotg} x]'$.

Podobně odvodíme nyní derivace funkcí $\arcsin x$ a $\arccos x$. Začneme první, platí, že $y = \arcsin x$ právě tehdy, když $x = \sin y$. Můžeme proto derivovat:

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{[\sin y]'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

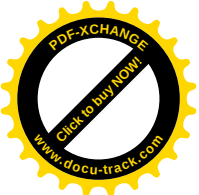
Stejně odvodíme i derivaci druhé funkce, přičemž platí $y = \arccos x$ právě tehdy, když $x = \cos y$. Proto můžeme psát: $[\arccos x]' = \frac{1}{[\cos y]'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Srovnáme-li opět obě derivace, zjistíme, že platí vztah: $[\arcsin x]' = -[\arccos x]'$.

Odvodíme si další důležitý derivační vzorec. Je jím derivace $[x^x]'$. Opět použijeme logaritmického derivování a můžeme psát: $[x^x]' = [e^{x \cdot \ln x}]' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1)$. Je tedy $[x^x]' = x^x \cdot (\ln x + 1)$ pro $x \in \mathbb{R}^+$, což je zároveň další důležitý derivační vzorec. Uvědomme si, že pokud za proměnnou x dosadíme nějakou funkci $f(x)$, pak dostáváme derivaci funkce $f(x)^{f(x)}$, která se počítá podle derivačního pravidla pro funkci typu $f(x)^{g(x)}$!

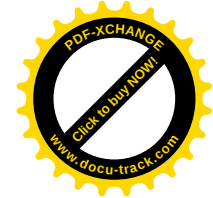
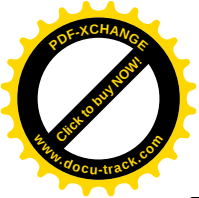
I.III.VIII Přehled derivačních vzorců a pravidel

Pro přehlednost uvedu v této kapitole vybrané derivační vzorce a důležitá derivační pravidla i s podmínkami, za kterých platí (tím také splácím dluh z předcházejících kapitol, kde jsem je občas – nutno dodat, že úmyslně – zanedbával, abych zajistil lepší čitelnost v některých případech už tak dost obtížných pasáží). Odvození samo o sobě se může zdát nepřehledné a proto bude účelnější tyto poznatky uspořádat přehledně a uvést je všechny v jedné kapitole. I přes to se však na jejich odvození tímto odvolávám. Je třeba ona odvození velmi pečlivě nastudovat, neboť nám ukazují použití uváděných vzorců a také jejich vlastnosti! Pokud tedy student vynechal kapitoly I.III.II a I.III.VIII (jakož i jiné!), nechť se k nim nyní vrátí a nastuduje je.



<u>Funkce</u>	<u>její derivace</u>	<u>a podmínky za kterých platí</u>
c	0	$c \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^-$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{k \cdot \pi / 2\}$
$\cotg x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{k \cdot \pi\}$
$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$[\operatorname{arccotg} x]'$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$[\arcsin x]'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in \langle -1; 1 \rangle$
$[\arccos x]'$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in \langle -1; 1 \rangle$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in (0; \infty)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x \in (0; \infty), a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
$\log x$	$\frac{\log e}{x}$	$x \in (0; \infty)$
x^x	$x^x \cdot (\ln x + 1)$	$x \in \mathbb{R}^+$

Nyní si uvedeme, opět tabulkovým způsobem, derivační pravidla, pomocí kterých počítáme derivace složitějších funkcí.



Základní derivační pravidla:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad g(x) \neq 0$$

Derivace složené funkce:

$$[z(x)]' = [f(g(x))]' = f'(y) \cdot g'(x)$$

funkce $f(y)$ má vlastní derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a funkce $g(x)$ má vlastní derivaci v bodě x_0

Derivace inverzní funkce:

$$\left[f^{-1}(x) \right]' = \frac{1}{f'(y)}$$

$f'(y) \neq 0$, $f(y)$ je funkce prostá

(tudíž ryze monotónní) a spojitá

Funkci $f'(y)$ v proměnné y je třeba dalšími vhodnými úpravami převést na funkci argumentu x . Tyto úpravy vycházejí z definice zadané funkce a k ní funkce inverzní!!!

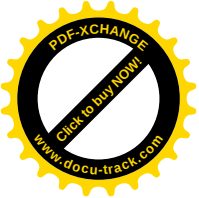
Logaritmické derivování:

$$\left[f(x)^{g(x)} \right]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right) \quad f(x) > 0$$

Důležitým předpokladem pro použití všech derivačních pravidel je, že existují v nich uváděné derivace, a to jak funkcí zadaných, tak i k nim inverzních (pokud je použito pravidlo derivace inverzní funkce).

I.III.IX Některé věty o derivacích, spojitost funkce, diferenciál funkce

Kromě znalostí derivačních vzorců a pravidel jsou nedílnou součástí také vlastnosti derivací. Jejich znalost nám pomáhá určit kdy a hlavně jak použít matematického aparátu derivace ať už pro čistě matematické aplikace, tak i pro aplikace fyzikální či jiné.



Některé vlastnosti vyplývají přímo z definice derivace jakožto jisté limity, jiné jsou skryté a dostaneme se k nim po někdy jednodušších, jindy trochu složitějších, úvahách. A právě těmto úvahám a vlastnostem derivací bude věnována tato kapitola.

Pojem derivace jsme si zavedli pomocí limity diferenčního podílu. Řekli jsme, že pokud tato limita existuje (ať už vlastní nebo nevlastní), má daná funkce derivaci (opět vlastní či nevlastní), která je rovna právě oné limitě. Víme už, že vyšetřovaná funkce má limitu v nějakém bodě x_0 právě tehdy, když má limitu zleva i limitu zprava v tomto bodě a tyto limity se rovnají. Stejně tak v případě derivace. Říkáme, že funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x) = A$ právě tehdy, když platí $f'_+(x) = f'_-(x) = A$. Jednoduše řečeno, má-li nějaká funkce $f(x)$ derivaci zprava i zleva a tyto derivace se rovnají, má také „*oboustrannou*“ derivaci, která je rovna oběma zmíněným derivacím. Důkaz této věty je shodný s důkazem podobné věty pro limity uvedeným v kapitole I.II.II, proto jej na tomto místě nebudu uvádět.

Důležitým pojmem je spojitost funkce. Tu jsme už definovali na základě existence limity zkoumané funkce v bodě x_0 , která se rovnala přímo funkční hodnotě této funkce v bodě x_0 . Podívejme se nyní na spojitost funkce z hlediska derivací.

Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, když existuje v tomto bodě její vlastní derivace $f'(x)$. Totéž pro spojitost funkce zprava respektive zleva, jen s použitím vlastní derivace zprava respektive zleva.

Důkaz této věty je jednoduchý. Pokud existuje vlastní derivace funkce $f(x)$, tedy $f'(x)$, musí platit následující:
$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h =$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$
 a srovnáním levé a pravé strany této rovnosti dostáváme rovnici:
$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) = 0.$$
 Po vyšetření limity menšitele a pomocí jednoduché úpravy máme rovnost:
$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$
 To znamená, že funkce $f(x)$ je spojitá. Analogicky pro spojitost funkce $f(x)$ zprava a zleva.

Pokud existuje derivace funkce $f'(x)$ v bodě x_0 a je nevlastní, funkce $f(x)$ nemusí být v tomto bodě spojitá!

Podívejme se na příklad. Mějme funkci $f: y = \operatorname{sgn}(x)$ a máme zjistit spojitost této funkce v bodě $x_0 = 0$. Funkce je definována pro všechna reálná čísla tak, že pro $x < 0$ je $f(x) = -1$, pro $x = 0$ je $f(x) = 0$ a nakonec pro $x > 0$ je $f(x) = 1$. Aby existovala derivace, musela by existovat také limita
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
 V případě, že vyšetřujeme existenci

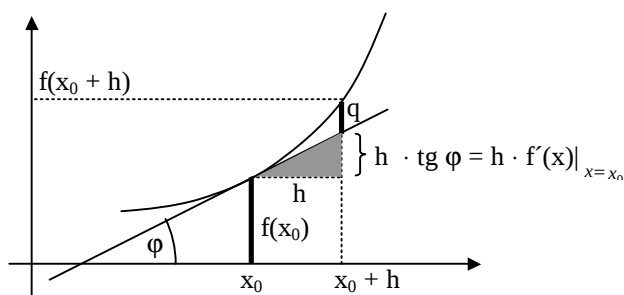
derivace (a tedy limity) v bodě x_0 , bude platit: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$. Uvědomme si, že $h > 0$ (nule se nerovná!), takže $f(h)$ musí být rovno

jedné! Dále protože je $h > 0$, bude se h blížit k nule vždy zprava a proto bude hodnota jmenovatele zlomku vždy kladná, i když velmi blízka nule. Bude tedy platit, že $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} = +\infty$.

To ale znamená, že derivace funkce $f: y = \operatorname{sgn}(x)$ v bodě $x_0 = 0$ existuje a je nevlastní, tedy $f'(x) = +\infty$. Ačkoliv derivace funkce $\operatorname{sgn}(x)$ existuje (nyní jsme její existenci dokázali) funkce není v bodě $x_0 = 0$ spojitá, a to dokonce ani zprava ani zleva!

Dalším důležitým pojmem je diferenciál funkce. Podívejme se nyní na obrázek I.III.IX.a, který nám velmi názorně ukazuje geometrický význam pojmu diferenciál funkce. Z obrázku pak vyvodíme matematickou definici (postup není zcela exaktní, ale je velmi názorný).

Předně musíme mít definovanou nějakou funkci $f: y = f(x)$ a dále pevně zvolený bod x_0 . Zřejmě bude platit, že pokud se z bodu x_0 hneme do bodu $x_0 + h$, pak můžeme přírůstek funkční hodnoty vyjádřit rozdílem $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Otázka zní, zda je tento přírůstek funkce v bodě x_0



přibližně přímo úměrný právě hodnotě přírůstku argumentu h (tj. zda je hodnota q – viz. obrázek I.III.IX.a – natolik malá, že ji můžeme zanedbat, tedy, že je limitně blízka nule). Samozřejmě předpokládáme, že $|h|$ nabývá velmi malých hodnot. Tato myšlenka nás vede k tomu, vyjádřit hodnotu $f(x_0 + h)$ jako funkci přírůstku argumentu h . Z geometrie je zřetelně vidět, že bude platit:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x)|_{x=x_0} + q$$

Takže pokud existuje číslo $f'(x)|_{x=x_0}$ takové, že vyhovuje dané rovnosti, přičemž se hodnota q bude limitně blížit nule pro $h \rightarrow 0$, pak výraz $h \cdot f'(x)|_{x=x_0}$ nazveme diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě x_0 .

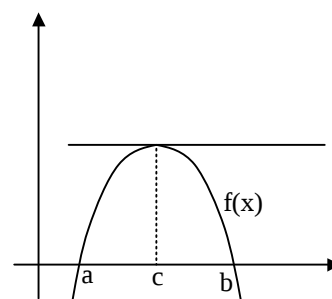
Geometrický význam diferenciálu funkce je zřejmý. Pro velmi malé hodnoty přírůstku argumentu h můžeme přírůstek funkční hodnoty v bodě x_0 napsat jako funkci proměnné h s chybou q , která je ale mnohem menší než absolutní hodnota přírůstku argumentu h !!!

Pro přiblížení spočteme příklad. Určete hodnotu funkce $f: y = x^3$ pro $x = 4,025$. Je vidět, že $x = 4 + 0,025$, kde v našem značení bude $x_0 = 4$ a $h = 0,025$. Derivujme funkci $f(x)$ a máme $f'(x) = 3 \cdot x^2$. Můžeme tedy s použitím diferenciálu psát: $x^3 = x_0^3 + f'(x_0) \cdot h = 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 0,025 = 64 + 48 \cdot 0,025 = 64 + 1,2 = 65,2$. Ověřme nyní pomocí kalkulatoru přesnost výpočtu a dostáváme: $(4,025)^3 = 66,208$. Rozdíl mezi správnou hodnotou a námi vypočtenou pomocí diferenciálu je v absolutní hodnotě $0,008$, je tedy cca třetinový oproti přírůstku argumentu $h!!!$

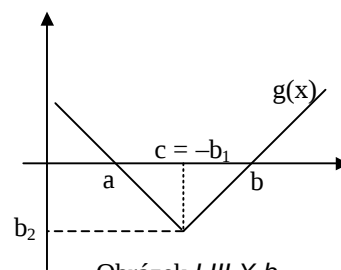
I.III.X Věta o střední hodnotě

Věta o střední hodnotě je z hlediska derivací velmi důležitá. Proto jí věnujeme jednu celou kapitolu. V některých literaturách se také můžeme setkat s jiným názvem, totiž s větou o přírůstku funkce respektive s větou Lagrangeovou. Tato věta společně s větami Rolleovou a Cauchyovou mají zásadní význam!!! Dále v kapitole jej ukáží. Položme nejprve větu Rolleovu, tu pak zobecníme do věty o střední hodnotě a jejím zobecněním dostaneme větu Cauchyovu.

Podívejme se na funkce $f: y = a_1x^2 + a_2x + a_3$, $a_1 < 0$ a $g: y = |x + b_1| + b_2$, kde $b_1, b_2 < 0$. Grafy těchto funkcí jsou na obrázcích I.III.X.a a I.III.X.b. Obě funkce mají tu vlastnost, že krajní body a, b leží na ose x a tak $f(a) = g(a) = f(b) = g(b) = 0$. Navíc jsou obě na intervalu $\langle a; b \rangle$ spojité, což je velmi důležitý předpoklad!!! Všimněme si nejprve funkce $f(x)$. Určitě bude na intervalu $(a; b)$ existovat nějaký bod c , pro který bude platit, že $f'(c) = 0$, tedy, že derivace funkce $f(x)$ bude nulová. Kdyby funkce $f(x)$ měla na intervalu $(a; b)$ více lokálních extrémů (maxim respektive minim) existovalo by bodů c s touto vlastností několik. Můžeme tedy říci, že pokud existuje interval $\langle a; b \rangle$ na němž je funkce $f(x)$ spojitá takový, že $f(a) = f(b) = 0$, potom existuje alespoň jeden bod c s tou vlastností, že $c \in (a; b)$ a zároveň $f'(c) = 0$.

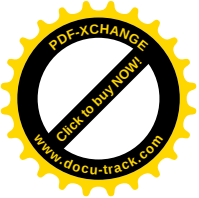


Obrázek I.III.X.a



Obrázek I.III.X.b

Podívejme se na funkci $g(x)$. Na intervalu $\langle a; b \rangle$ je také spojitá a podle našich předpokladů by tedy někde na otevřeném intervalu $(a; b)$ měl existovat alespoň jeden bod c takový, že $g'(c) = 0$. Mohlo by se zdát, že tímto bodem je $c = [-b_1; b_2]$. Takže otázka zní, existuje v bodě $c = [-b_1; b_2]$ derivace funkce $g(x)$?



Odpověď je nasnadě. Aby měla funkce $g(x)$ v bodě c derivaci, musí mít v tomto bodě derivaci zprava i zleva a navíc se tyto derivace musejí rovnat. Derivace funkce $g(x)$ v bodě c zprava je rovna 1 . Derivace funkce $g(x)$ v bodě c zleva je však rovna -1 . Ta ale znamená, že se jednostranné derivace v bodě c sobě nerovnajší a proto funkce $g(x)$ v bodě c nemá derivaci!!! A to ačkoliv byly splněny všechny až do teď definované podmínky. Jedná se totiž o podmínky nutné, nikoliv však postačující.

Je třeba dodefinovat ještě jednu podmínku, totiž, že zkoumaná funkce bude mít na otevřeném intervalu $(a; b)$ derivaci. Rolleova věta proto musí znít: mějme funkci $f(x)$, která je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$, přičemž platí rovnosti $f(a) = f(b) = 0$. Dále necht' existují derivace $f'(x)$ na celém otevřeném intervalu $(a; b)$! Potom existuje bod $c \in (a; b)$ takový, že $f'(c) = 0$.

Důkaz této věty je velmi jednoduchý. Z geometrie problému je zřejmé, že mohou nastat tyto tři případy: jednak existuje alespoň jeden bod x_1 z uzavřeného intervalu $\langle a; b \rangle$ takový, že $f(x_1) > 0$, zadruhé existuje alespoň jeden bod x_2 z uzavřeného intervalu $\langle a; b \rangle$ takový, že $f(x_2) < 0$ a konečně zatřetí je to situace, kdy nenastane ani první ani druhý případ, tedy kdy je má funkce $f(x)$ na celém uzavřeném intervalu funkční hodnoty nulové, tj. $f(x) = 0$ pro všechny $x \in \langle a; b \rangle$.

Podívejme se na první možnost. Podle Rolleovy věty musí na intervalu $\langle a; b \rangle$ existovat bod c takový, že $f(x) \leq f(c)$ pro všechna $x \in \langle a; b \rangle$, tedy i pro x_1 . A protože je $f(a) = f(b) = 0$, musí být $c \neq a, b$ a budou platit tyto nerovnosti: $a < c < b$. Rolleova věta dále předpokládá existenci derivace ve všech bodech otevřeného intervalu $(a; b)$, takže bude také existovat derivace funkce $f(x)$ v bodě c , $f'(c)$. Kdyby byla $f'(c) > 0$, byla by funkce $f(x)$ v bodě c rostoucí a proto by existovalo v intervalu $(c; b)$ nějaké číslo x takové, že $f(x) > f(c)$. To ale není přímo z předpokladů Rolleovy věty možné!!! Kdyby byla $f'(c) < 0$, byla by funkce $f(x)$ v bodě c klesající a na intervalu $(a; c)$ by existovalo nějaké číslo x takové, že $f(x) > f(c)$, což opět není podle předpokladů možné!!! Takže shrneme-li vše, derivace $f'(c)$ existuje, není však ani kladná ani záporná, musí být proto $f'(c) = 0$.

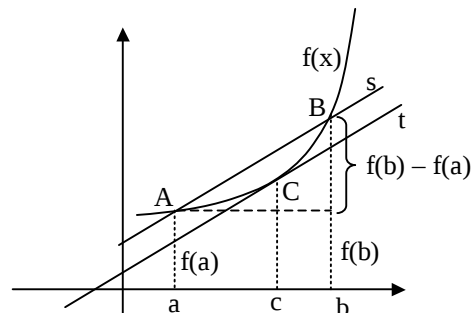
Za druhé, vezměme funkci $-f(x)$. Je jistě spojitá na $\langle a; b \rangle$ a má také derivaci v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Navíc platí $-f(a) = -f(b) = 0$ a zároveň je $-f(x_2) > 0$. Vzhledem k prvnímu případu tedy existuje bod $c \in (a; b)$ takový, že $-f'(c) = 0$ a tedy také $f'(c) = 0$.

Třetí případ není třeba dokazovat, protože $f'(x) = 0$ pro každý bod intervalu otevřeného $(a; b)$. Tím je důkaz Rolleovy věty hotov.

Pokud vynecháme rovnost $f(a) = f(b) = 0$, tedy připustíme také, že může nastat situace, kdy $f(a) \neq f(b) \neq 0$, dostáváme větu o střední hodnotě (viz. obrázek I.III.X.c). Věta o střední hodnotě nám říká, že pokud je nějaká funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$ spojitá a existuje-li derivace funkce $f(x)$ ve všech vnitřních bodech otevřeného intervalu $(a; b)$, potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a; b)$ takový, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \text{ Co to vlastně znamená?}$$

Podíl $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ je vlastně směrnice přímky s ,



Obrázek I.III.X.c

která prochází body A a B a číslo $f'(c)$ je směrnice tečny t

sestrojená v bodě C. Geometricky nám tedy věta o střední hodnotě říká, že na oblouku AB grafu funkce $f(x)$ existuje alespoň jeden bod C s tou vlastností, že tečna v něm sestrojena je rovnoběžná s přímkou procházející krajními body A a B uvažovaného oblouku.

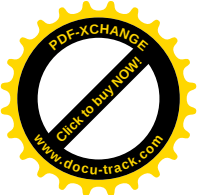
Provedeme ještě jedno zobecnění na větu Cauchyovu. Tato věta se týká dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ a tvrdí: mějme dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, obě spojitě na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$, přičemž funkce $f(x)$ má na celém otevřeném intervalu $(a; b)$ vlastní nebo nevlastní derivaci a funkci $g(x)$ má na tomto intervalu vlastní derivaci ne rovnu nule. Potom existuje na otevřeném intervalu $(a; b)$ bod c takový, že $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. V případě, že se funkce $g(x) = x$ a tedy $g'(x) = 1$ dostáváme větu o střední hodnotě!

Tato věta v podstatě říká, že na otevřeném intervalu (a, b) existuje bod c s tou vlastností, že derivace v něm spočtené jsou ve stejném poměru jako přírůstky funkčních hodnot funkcí $f(x)$ a $g(x)$ v krajních bodech intervalu $\langle a; b \rangle$.

Jedním z hlavních důsledků věty o střední hodnotě je ten, že funkci $f(x)$, která má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $(a; b)$, nazveme konstantní právě tehdy, když platí $f'(x) = 0$ pro každý bod $x \in (a; b)$.

I.III.XI Derivace druhého a vyšších řádů

Derivace tak, jak jsme si pojem nadefinovali a naučili se s ním pracovat v předcházejících kapitolách, je derivace prvního řádu. Místo derivace prvního řádu se ale používá označení derivace. Derivace značíme různými způsoby, například $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, atd.



Derivace $f'(x)$ je obecně zase funkcí proměnné x s definičním oborem všech x , pro které existuje vlastní derivace $f'(x)$. Derivaci funkce $f'(x)$ nazýváme druhou derivací funkce $f(x)$ nebo také derivací funkce $f(x)$ druhého řádu a zapisujeme ji $f''(x)$ případně $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ nebo jen y'' . Derivaci funkce $f''(x)$ nazýváme třetí derivací funkce $f(x)$ nebo také derivací funkce $f(x)$ třetího řádu a píšeme $f'''(x)$ případně $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$ nebo y''' . Můžeme takto pokračovat dále a obecně říkáme, že derivací $(n-1)$ -ní derivace funkce $f(x)$ je n -tá derivace funkce $f(x)$, nebo také derivace funkce $f(x)$ n -tého řádu. Tuto derivaci zapisujeme symboly $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$. Závorky v prvních dvou možných zápisech n -té derivace funkce $f(x)$ jsou odlišení od mocniny!!!

Jak to bude vypadat, když uděláme m -tou derivaci z n -derivace funkce $f(x)$? Tedy jak vyjádříme $[f^{(n)}(x)]^{(m)}$? Je zřejmě $[f^{(n)}(x)]^{(m)} = f^{(n+m)}(x)$.

Důležitým faktem je, že pokud existuje číslo $f^{(n)}(x_0)$ znamená to, že existuje derivace funkce $f^{(n-1)}(x)$. To znamená, že funkce $f^{(n-1)}(x)$ je definována na celém prstencovém okolí bodu x_0 a kromě této funkce jsou na tomto okolí definovány funkce $f^{(n-2)}(x)$, $f^{(n-3)}(x)$, $f^{(n-4)}(x)$, ..., $f'(x)$ a nakonec i $f(x)$!!!

K derivacím vyšších řádů se váže také Leibnitzova formule. Mají-li funkce u a v derivace v bodě x_0 až do n -tého řádu, potom je v tomto bodě n -tá derivace jejich součinu

$$\text{rovna: } (u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

I.IV Řešení průběhů funkcí jedné proměnné

Tak, jako jsme se v kapitolách věnovaných limitám právě pomocí limit snažili popsat průběhy funkcí, tak se totéž budeme snažit s použitím derivací. A právě spojení derivací a limit představuje ohromně silný nástroj funkcionální analýzy a dovoluje nám odhadnout s dostatečnou přesností právě průběhy funkcí a načrtnout jejich grafy.

I.IV.I Monotónnost funkcí

V kapitolách věnovaných funkcím na začátku těchto skript jsme definovali monotónnost funkcí na základě funkčních hodnot buď v celém definičním oboru a nebo na nějakém intervalu, který patřil do definičního oboru zkoumané funkce. Rozlišili jsme si funkce monotónní, ryze monotónní a nemonotónní, přičemž byla-li funkce ryze monotónní,

byla také monotónní. Opačně to však neplatí! Zavedli jsme si také pojem monotónnosti v celém definičním oboru zkoumané funkce a monotónnosti na nějakém intervalu. A nyní se na tyto vlastnosti podíváme z pohledu derivací.

Aby zkoumaná funkce byla funkcí ryze monotónní, musí být buď rostoucí a nebo klesající. Podívejme se nyní na funkci rostoucí (viz. obrázek I.IV.I.a). Úhel φ , který svírá tečna ke grafu funkce $f(x)$ s kladnou osou x , se samozřejmě mění. Půjdeme-li se z bodu x_0 směrem k x_1 (tj. doprava ve směru kladné osy x), bude se velikost úhlu φ zvětšovat. Nikdy však nedosáhne hodnoty 90° , bude vždy menší (kdyby dosáhla, nejednalo by se již z pohledu matematiky o funkci)!!!

Půjdeme-li z bodu x_0 směrem k bodu x_2 (tj. doleva ve směru záporné osy x), bude se velikost úhlu φ postupně zmenšovat až na hodnotu 0° (tam se prozatím zastavíme). Bod, v němž je velikost úhlu φ rovna 0° , v úvahu zatím brát nebudeme a věnujeme mu celou kapitolu I.IV.II.

Z tohoto rozboru je patrné, že v případě rostoucí funkce je úhel φ , který svírá tečna ke grafu zadané funkce vždy v otevřeném intervalu $(0^\circ; 90^\circ)$, tedy, nalézají se vždy v I. kvadrantu. Jeho tangenta bude tedy vždy kladná!!!

Geometrický význam derivace je jasný. Ve své číselné podobě se jedná o tangentu úhlu, který svírá tečna ke grafu zkoumané funkce se směrem kladné osy x . Takže pro rostoucí funkci $f(x)$ musí platit následující vztah: $f'(x) > 0$.

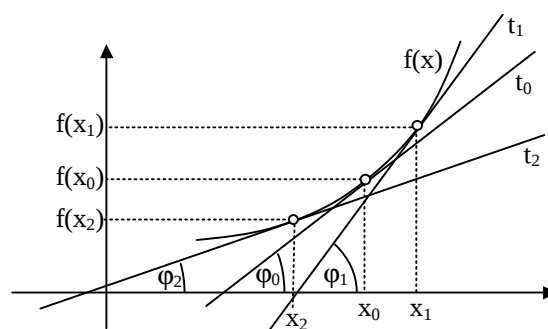
To také vyplývá z věty o střední hodnotě. Ta říká, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na nějakém intervalu $(a; b)$, samozřejmě $a < b$, pak existuje bod $c \in (a; b)$, pro který platí:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

V případě rostoucí funkce ale funkční hodnoty s rostoucím argumentem

také rostou a tak výraz v čitateli zlomku je jistě kladný (kladné znaménko rozdílu $b - a$ ve jmenovateli zlomku se předpokládá předem!!!). To znamená, že pro každý bod $c \in (a; b)$ je $f'(c) > 0$ a na intervalu $(a; b)$ můžeme psát $f'(x) > 0$. Rozšíříme-li interval $(a; b)$ na celý definiční obor zkoumané funkce $f(x)$, dostáváme nutnou (a postačující) podmínku k tomu, aby byla daná funkce rostoucí na celém svém definičním oboru.

Podobnými úvahami dospějeme k podmínce pro klesající funkci (viz. obrázek I.IV.I.b). Úhel φ , který svírá tečna ke grafu funkce $f(x)$ s kladnou osou x , se



Obrázek I.IV.I.a

samozřejmě opět mění. I zde bude platit, že pokud se hneeme z bodu x_0 směrem k x_1 (tj. doprava ve směru kladné osy x), bude se velikost úhlu φ zvětšovat a to až na hodnotu 180° . I nyní bod, v němž je velikost úhlu φ rovna 180° , v úvahu brát nebudeme a věnujeme mu celou kapitolu I.IV.II. Z hlediska průběhu funkcí má tento bod stejný význam jako bod, v němž je velikost úhlu φ rovna 0° .

Půjdeme-li z bodu x_0 směrem k bodu x_2 (tj. doleva ve směru záporné osy x), bude se velikost úhlu φ postupně zmenšovat až na hodnotu 90° . Ani zde hodnoty 90° velikost úhlu φ nedosáhne, bude ale vždy větší (kdyby dosáhla, nejednalo by se opět z pohledu matematiky o funkci)!!!

Z tohoto rozboru je patrné, že v případě klesající funkce je úhel φ , který svírá tečna ke grafu zadané funkce vždy v otevřeném intervalu $(90^\circ; 180^\circ)$, tedy, nalézá se vždy ve II. kvadrantu. Jeho tangenta bude tedy vždy záporná!!! Takže

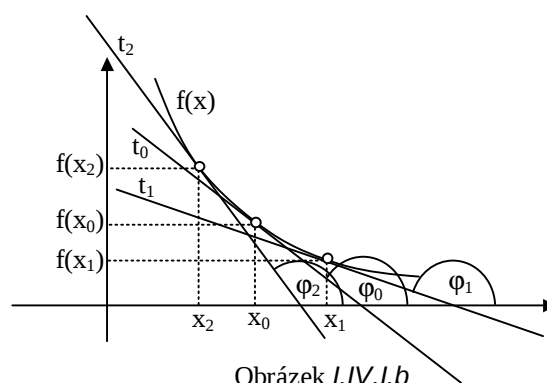
pro klesající funkci $f(x)$ musí platit následující vztah: $f'(x) < 0$. Podívejme se na větu o střední hodnotě. Ještě jedno si ji stručně zopakujeme. Říká, že je-li funkce $f(x)$ spojitá na nějakém intervalu $(a; b)$, samozřejmě $a < b$, pak existuje bod $c \in (a; b)$, pro který platí:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \text{ V případě klesající funkce ale funkční hodnoty s rostoucím argumentem}$$

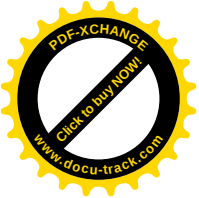
klesají a tak výraz v čitateli zlomku bude záporný (přičemž kladné znaménko rozdílu $b - a$ ve jmenovateli zlomku se předpokládá předem!!!). To znamená, že pro každý bod $c \in (a; b)$ je $f'(c) < 0$ a na intervalu $(a; b)$ můžeme psát $f'(x) < 0$. Rozšíříme-li opět interval $(a; b)$ na celý definiční obor zkoumané funkce $f(x)$, dostáváme nutnou (a také postačující) podmínku k tomu, aby byla daná funkce klesající na celém svém definičním oboru.

Pokud celý definiční obor nahradíme nějakým libovolným intervalem $I \subset D_f$ a na tomto intervalu je splněna podmínka pro rostoucí respektive klesající funkci, říkáme, že daná funkce je rostoucí respektive klesající na intervalu I .

A jak je to s funkcemi nerostoucími či neklesajícími? Zcela analogické. Pro nerostoucí funkci musí platit, že $f'(x) \leq 0$ a pro neklesající funkci pak $f'(x) \geq 0$. Student si jistě sám v rámci procvičování vymodeluje odpovídající situace podobně jako jsou uvedeny na obrázcích I.IV.I.a a I.IV.I.b pro rostoucí a klesající funkce. Pokud zde celý definiční obor nahradíme libovolným intervalem $I \subset D_f$ a na tomto intervalu je splněna podmínka pro



Obrázek I.IV.I.b



nerostoucí respektive neklesající funkci, říkáme, že daná funkce je nerostoucí respektive neklesající na intervalu I .

Důkaz těchto čtyř vět o monotónnosti funkce vychází přímo z věty o střední hodnotě při sledování znamének zlomku definujícího onu derivaci funkce v bodě c a z definic rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající funkce, které jsou uvedeny v kapitole I.I.II.

Podívejme se na příklad. Vyšetřeme monotónnost funkce $f: y = \frac{\ln^2 x}{x}$. Definiční obor funkce je $D_f = (0; +\infty)$.

Vypočítejme nyní první derivaci: $\left[\frac{\ln^2 x}{x} \right]' = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$. Tak

například v bodě $x = 0,5$ je $f'(0,5) \cong -1,867$. V tomto bodě je zkoumaná funkce klesající. Pro $x = 1,5$ je $f'(1,5) \cong 0,647$ a proto je v tomto bodě zkoumaná funkce rostoucí. Abychom popsali co nejlépe průběh nějaké funkce, je třeba zjistit nejen některé body z jejího definičního oboru, v nichž je daná funkce rostoucí či klesající, ale také intervaly, ve kterých má tato funkce zkoumané vlastnosti.

Aby zkoumaná funkce byla rostoucí, musí platit: $f'(x) > 0$. Řešením nerovnice $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} > 0$ tak dostaneme intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí. Zřejmě bude x^2 vždy kladné, takže aby celá derivace byla kladná, musí být kladný i čítec zlomku ve výrazu derivace. Takže můžeme nerovnici upravit na tvar $2 \ln x - \ln^2 x > 0$. Vynásobíme-li nerovnici -1 , pak dostáváme: $\ln^2 x - 2 \ln x < 0$.

Zavedeme substituci $t = \ln x$ a po úpravě dostáváme $t \cdot (t - 2) < 0$. To je ale obyčejná kvadratická nerovnice s řešeními $t_1 = 0$ a $t_2 = 2$. Grafem kvadratické funkce je parabola, která je v tomto případě otevřená ve směru kladné osy y (tj. nahoru). Funkční hodnoty grafu kvadratické funkce, které jsou pod osou x , se nachází právě v intervalu $(0; 2)$ na ose x . Po dosazení zpátky do zavedené substituce dostáváme interval, ve kterém je zkoumaná funkce rostoucí. A to interval $(1; e^2)$.

Vyšetřeme interval, na kterém je funkce $f(x)$ klesající. Musí být splněna následující podmínka: $f'(x) < 0$. Takže řešením nerovnice $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} < 0$ dostaneme intervaly, ve kterých je daná funkce klesající. Opět bude x^2 vždy kladné, takže aby celá derivace byla záporná, musí být záporný i čítec zlomku ve výrazu derivace. Takže můžeme nerovnici

upravit na tvar $2 \ln x - \ln^2 x < 0$. Vynásobíme-li nerovnici -1 , pak dostáváme:
 $\ln^2 x - 2 \ln x > 0$.

I nyní zavedeme substituci $t = \ln x$ a po úpravě dostáváme $t \cdot (t - 2) > 0$. Řešeními této kvadratické nerovnice jsou $t_1 = 0$ a $t_2 = 2$. Funkční hodnoty grafu kvadratické funkce, které jsou nad osou x , se nachází právě v intervalu $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ na ose x . Po dosazení zpátky do zavedené substituce dostáváme interval, ve kterém je zkoumaná funkce klesající, to jest interval $(0; 1) \cup (e^2; +\infty)$.

Z těchto informací můžeme již, i když velmi zhruba, odhadnout průběh grafu zadané funkce. Kromě toho můžeme bez problémů určit funkční hodnoty zkoumané funkce v krajních bodech intervalů monotónnosti (vyjma bodů $x = 0$ a $x = +\infty$!!!). Není nic obtížného určit, že $f(1) = 0$ a $f(e^2) \cong 0,368$. Abychom zjistili, jak se chová zadaná funkce v pravém okolí počátku a v okolí $+\infty$, je třeba vzít do hry limity. Tedy vyšetřit postupně

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} \text{ a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}.$$

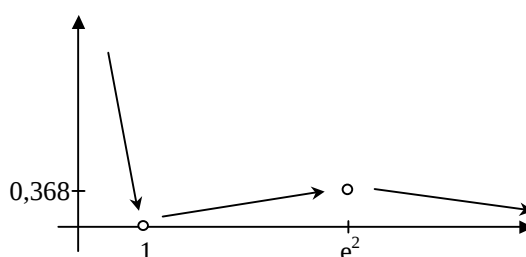
Podívejme se nejprve na první uvedenou limitu. Po dosazení $x = 0$ dostáváme neurčitý výraz. Bude ale jmenovatel vždy kladným, nekonečně malým, ale nenulovým číslem. Číselník bude také vždy kladným číslem (figuruje zde kvadrát), ale tentokrát nekonečně velkým.

$$\text{Proto můžeme psát } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x} = +\infty.$$

Druhá limita je také neurčitým výrazem, tentokrát typu ∞ / ∞ . S výhodou využijeme l'Hospitalova pravidla a můžeme psát:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Nyní je možné graf zkoumané funkce poměrně přesně vystihnout. Jeho průběh je načrtnut na obrázku I.IV.I.c. Šipky samozřejmě neznamenají přesný průběh grafu zadané funkce. Jedná se o znázornění trendů, které graf ve vypočtených intervalech monotónnosti má!!!



Obrázek I.IV.I.c

I.IV.II Extrémy funkcí

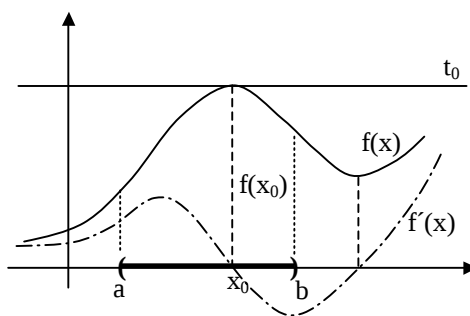
Další informací, která nám pomůže odhadnout graf nějaké funkce, je výskyt bodů, v nichž tato funkce nabývá svých maximálních respektive minimálních hodnot. Těmto bodům

říkáme extrémů funkce. Podrobně jsme se extrémními hodnotami funkcí zabývali v kapitole I.I.V. Nyní si ukážeme derivaci jako vhodný nástroj k jejich zjišťování.

Víme, že extrémů funkcí rozdělujeme podle jejich působnosti na lokální a globální a podle velikosti funkčních hodnot jichž funkce v daných bodech dosahuje pak na maxima a minima. Nejprve se omezíme na nějaký interval $I \subset D_f$ libovolné funkce a budeme se tak zabývat extrémů lokálními. V další části této kapitoly dojde ke zobecnění a přejdeme k extrémům globálním.

Začneme lokálním maximem. Jedná se o bod, v němž daná funkce v určitém intervalu $I \subset D_f$ (pozor, připomínám, že interval I musí být oboustranně otevřený!!!) dosahuje své největší funkční hodnoty (viz. obrázek I.IV.II.a). Je zřejmé, že tečna sestrojená ke grafu zkoumané funkce v bodě x_0 , ve kterém má tato funkce lokální maximum, bude rovnoběžná s osou x kartézské soustavy souřadnic (Oxy). Bude s ní tedy svírat úhel o velikosti 0° . Musí proto být splněna tato rovnost: $f'(x_0) = 0$ pro nějaký bod $x_0 \in I$. Pokud najdeme bod, pro který je právě uvedená rovnost splněna, víme, že v něm má tato funkce extrémní hodnotu, ale stále ještě nemůžeme jednoznačně říci, zda se jedná o maximum či minimum. Ovšem, důležitým předpokladem je, že funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x)$ ve všech vnitřních bodech otevřeného intervalu I !!!

Obecně je ale derivace $f'(x)$ opět funkcí. Její funkční hodnoty vystihují rostoucí respektive klesající trend funkce $f(x)$. To znamená, že v bodech, kdy je funkce $f(x)$ klesající, jsou funkční hodnoty její derivace $f'(x)$ záporné a v bodech, kdy je funkce $f(x)$ rostoucí, dosahuje její derivace $f'(x)$ kladných funkčních hodnot. V lokálních extrémech



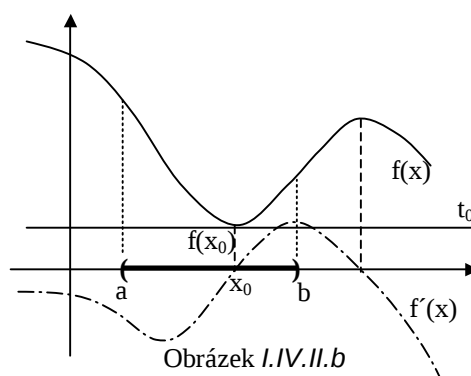
Obrázek I.IV.II.a

funkce $f(x)$ protíná její derivace $f'(x)$ osu x . Tento odstavec bude bezesbytku platit i tehdy, nahradíme-li symbol $f(x)$ symbolem $f'(x)$ a symbol $f'(x)$ symbolem $f''(x)$ a to za předpokladu existence druhé derivace $f''(x)$ zadané funkce $f(x)$ na intervalu I .

Na $P^-(x_0)$ je funkce $f(x)$ rostoucí. Její derivace bude proto kladná. Naproti tomu na $P^+(x_0)$ je funkce $f(x)$ klesající a proto bude její derivace záporná. Na celém $P(x_0)$ jsou ale funkční hodnoty $f(x)$ vždy menší (jedná se o pokles funkčních hodnot!!!) než je funkční hodnota $f(x_0)$ a proto bude mít na $P(x_0)$ první derivace $f'(x)$ funkce $f(x)$ klesající trend. Bude proto jistě platit, že $f''(x_0) < 0$ (viz. intervaly monotónnosti)!!!

Zopakujme tedy podmínky pro existenci lokálního maxima. Aby nějaká funkce $f(x)$ měla v bodě $x_0 \in I \subset D_f$ lokální maximum, musí platit, že: jednak existují $f'(x)$ a $f''(x)$ na celém intervalu I , zadruhé $f'(x_0) = 0$ a zatřetí $f''(x_0) < 0$.

Podívejme se, jak to vypadá s lokálním minimem. Je to bod, v němž daná funkce na určitém intervalu $I \subset D_f$ (opět připomínám, že interval I musí být oboustranně otevřený!!!) dosahuje své nejmenší funkční hodnoty (viz. obrázek I.IV.II.b). Je zřejmé, že i zde bude tečna sestavená ke grafu zkoumané funkce v bodě x_0 , ve kterém má tato funkce lokální minimum, rovnoběžná s osou x kartézské soustavy



souřadnic (Oxy). Bude s ní svírat úhel o velikosti 0° . Musí proto být splněna stejná rovnost, jako v případě lokálního maxima, totiž: $f'(x_0) = 0$ pro nějaký bod $x_0 \in I$. Pokud najdeme bod, pro který je právě uvedená rovnost splněna, opět víme jen to, že v něm má tato funkce extrémní hodnotu. Stále však nemůžeme jednoznačně říci, zda se jedná o maximum či minimum. Důležitým předpokladem je, že funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x)$ ve všech vnitřních bodech otevřeného intervalu I !!!

Na $P^-(x_0)$ je funkce $f(x)$ klesající. Její derivace bude proto záporná. Naproti tomu na $P^+(x_0)$ je funkce $f(x)$ rostoucí a proto bude její derivace kladná. Na celém $P(x_0)$ jsou ale funkční hodnoty $f(x)$ vždy větší (jedná se o růst funkčních hodnot!!!) než je funkční hodnota $f(x_0)$ a proto bude mít na $P(x_0)$ první derivace $f'(x)$ funkce $f(x)$ rostoucí trend. Bude proto jistě platit, že $f''(x_0) > 0$ (viz. intervaly monotónnosti)!!!

Podmínky pro existenci lokálního minima jsou tedy tyto: jednak existují $f'(x)$ a $f''(x)$ na celém intervalu I , zadruhé $f'(x_0) = 0$ a zatřetí $f''(x_0) > 0$.

Pokud v předcházejících odstavcích nahradíme interval $I \subset D_f$ celým definičním oborem D_f zkoumané funkce $f(x)$, pak dostáváme definici globálních extrémů funkce $f(x)$, tedy lokálního maxima a lokálního minima. Podmínky pro existenci globálních extrémů jsou jinak úplně stejné jako v případě jejich lokálních podob. Důležitým předpokladem samozřejmě zůstává existence $f'(x)$ a $f''(x_0)$, tentokrát však na celém definičním oboru funkce $f(x)$!!!

Důkaz vět o lokálních a globálních extrémech vychází z věty o střední hodnotě. Ta tvrdí, že pokud je nějaká funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a; b \rangle$ spojitá a existuje-li na otevřeném intervalu $(a; b)$ její derivace $f'(x)$, pak existuje bod $c \in (a; b)$ takový, že $f'(c)$ je rovna směrnici sečny grafu funkce $f(x)$ definované právě body a a b . Pokud tedy zvolíme

bodů a a b tak, že $f(a) = f(b)$ (obdoba Rolleovy věty), pak bude existovat bod $c \in (a; b)$ takový, že $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0$. V bodě c pak bude mít daná funkce $f(x)$ lokální či globální extrém. Důležitým předpokladem je, že interval $\langle a; b \rangle$ je podmnožinou definičního oboru funkce $f(x)$. Tím je v podstatě důkaz po formální stránce hotov.

Jako příkladu využijeme již jednou vyšetřovanou funkci $f: y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

V předcházející kapitole jsme určovali intervaly monotónnosti a přibližný průběh grafu této funkce je na obrázku I.IV.I.c. nyní se na tuto funkci podíváme z hlediska vyšetřování extrémů.

Vypočteme první i druhou derivaci funkce $f(x)$: $\left[\frac{\ln^2 x}{x} \right]' = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$ (již máme

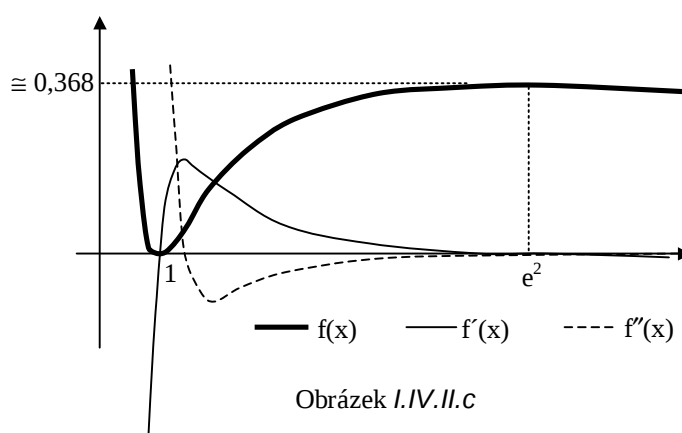
výsledek z předcházející kapitoly) a $\left[\frac{\ln^2 x}{x} \right]'' = \left[\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} \right]' =$

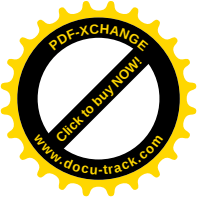
$$= \frac{\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x} \ln x \right) \cdot x^2 - (2 \ln x - \ln^2 x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2 \ln^2 x - 6 \ln x + 2}{x^3}.$$

V bodech, ve kterých je $f'(x) = 0$ bude mít funkce $f(x)$ extrémy. Je třeba vyřešit rovnici $f'(x) = 0$, tj. $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} = 0$. Vynásobením celé rovnice hodnotou $-x^2$ a po zavedení substituce $t = \ln x$ dostáváme kvadratickou rovnici: $t^2 - 2t = 0$. Jejími řešeními jsou $t_1 = 0$ a $t_2 = 2$. Po zpětném dosazení do substituce je $x_1 = 1$ a $x_2 = e^2$. V těchto bodech má vyšetřovaná funkce extrémální hodnoty. Dosazením do druhé derivace získáváme $f''(x_1) = f''(1) = 2$ a

$f''(x_2) = f''(e^2) = -\frac{2}{e^6}$. V bodě $x_1 = 1$ je

$f'(x_1) = 0$ a $f''(x_1) > 0$ proto má v tomto bodě funkce $f(x)$ minimum. V bodě $x_2 = e^2$ je $f'(x_2) = 0$ a $f''(x_2) < 0$ proto má v tomto bodě funkce $f(x)$ maximum. Tyto body jsou jak lokálními tak globálními extrémy. Na obrázku I.IV.II.c je zobrazen přesný průběh funkce $f(x)$, průběhy její 1. a 2. derivace.





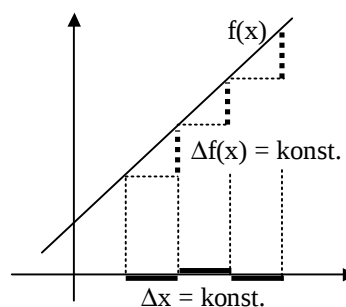
Z předcházejících dvou kapitol je také patrné, že vyšetřit extrémy nějaké funkce lze i pomocí intervalů monotónnosti. V bodech, kde zadaná funkce mění svoji monotónnost totiž dosahuje funkce svých extrémálních funkčních hodnot. Je zřejmé, že v bodě, kde se mění funkce z klesající na rostoucí, bude mít svoje lokální popřípadě globální minimum a naopak tam, kde se mění funkce z rostoucí na klesající, bude její lokální respektive globální maximum.

I.IV.III Konkávnost a konvexnost funkcí, inflexní bod

Podrobně jsem popsal tyto vlastnosti funkcí v kapitole I.I.III. Pokud student pozapomněl, necht' si tuto kapitolu ještě jednou nastuduje a pokračuje dále ve studiu na tomto místě.

Konvexnost a konkávnost funkce je vlastnost, která nám říká, jak se vyvíjí rychlost změny funkčních hodnot v závislosti na změně argumentu funkce.

Uvažme spojitou funkci $f(x)$. Kdyby měla taková funkce stále konstantní růst funkčních hodnot (ať už kladný pro rostoucí funkci nebo záporný pro funkci klesající) v závislosti na přírůstku argumentu, byla by grafem takové funkce přímka.



Obrázek I.IV.III.a

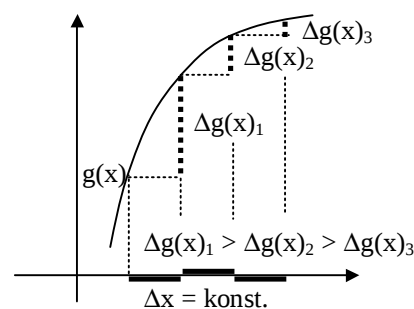
Budeme-li zvětšovat vždy o konstantní hodnotu argument x funkce f , budou nám růst, respektive klesat, i její funkční hodnoty $f(x)$ vždy o konstantní přírůstek (viz. obrázek I.IV.III.a) – ale pozor, přírůstek může být i záporný. To znamená, že rychlost růstu respektive poklesu funkčních hodnot $f(x)$ funkce f v závislosti na přírůstku argumentu x je konstantní, nemění se. Změna této rychlosti funkčních hodnot v závislosti na argumentu je proto nulová!!!

Derivace $f'(x)$ libovolné funkce $f(x)$ je na nějakém intervalu $I \subset D_f$ obecně opět funkcí, jejíž funkční hodnoty vyjadřují rychlost změny funkčních hodnot funkce $f(x)$. Samozřejmě za předpokladu, že zadaná funkce $f(x)$ má na intervalu $I \subset D_f$ vlastní derivaci.

Je tedy pro lineární funkci $f(x)$ její derivace $f'(x)$ funkcí konstantní. Druhá derivace funkce $f(x)$, totiž $f''(x)$, je vlastně první derivací derivace $f'(x)$. To znamená, že $f''(x)$ vyjadřuje rychlost změny první derivace $f'(x)$. Ovšem v případě lineární funkce je $f'(x)$ konstantní (viz. výše) a tak musí být $f''(x) = 0$ pro všechny body $x \in I \subset D_f$ (viz. inflexní bod dále v textu kapitoly)!!!

Uvažujme nyní spojitou funkci $g(x)$, která je rostoucí, a rozeberme případ, kdy rychlost změny funkčních hodnot funkce $g(x)$ v závislosti na argumentu x klesá. Příklad

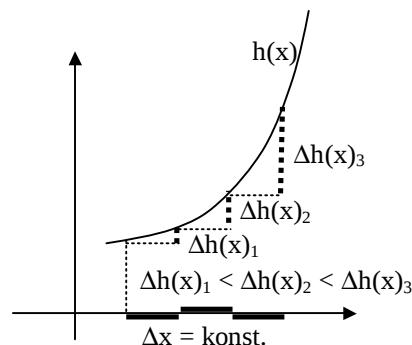
takové funkce může být na obrázku I.IV.III.b. Budeme-li zvětšovat vždy o konstantní hodnotu argument x funkce g , budou nám růst i její funkční hodnoty $g(x)$, ale vždy o menší přírůstek než v přecházejícím kroku. To znamená, že rychlost růstu funkčních hodnot $g(x)$ funkce g v závislosti na přírůstku argumentu x není konstantní a mění se. Změna rychlosti růstu funkčních hodnot v závislosti na argumentu je proto záporná (rychlost růstu funkčních hodnot klesá)!!!



Obrázek I.IV.III.b

Za předpokladu, že daná funkce má na nějakém intervalu $I \subset D_g$ vlastní derivace $g'(x)$ a $g''(x)$, musí být pro funkci $g(x)$ její derivace $g'(x)$ funkcí klesajících (byť s funkčními hodnotami většími než nula)!!! Druhá derivace funkce $g(x)$, totiž $g''(x)$, je první derivací derivace $g'(x)$. To znamená, že $g''(x)$ i zde vyjadřuje rychlost změny první derivace $g'(x)$. Ovšem v tomto případě je $g'(x)$ klesající (viz. výše) a tak musí být $g''(x) < 0$ pro všechny body $x \in I \subset D_g$!!! Funkci $g(x)$ pak nazýváme funkcí ryze konkávní na intervalu $I \subset D_g$.

Zůstaneme ještě u funkce rostoucí (která je opět spojitá). Budeme ale uvažovat funkci $h(x)$ s tou vlastností, že rychlost změny funkčních hodnot $h(x)$ funkce h v závislosti na argumentu x bude růst (viz. obrázek I.IV.III.c). Budeme-li zvětšovat vždy o konstantní hodnotu argument x funkce h , budou nám růst i její funkční hodnoty $h(x)$, ale vždy o větší přírůstek než v přecházejícím kroku. To znamená, že rychlost růstu funkčních hodnot $h(x)$ funkce h v závislosti na přírůstku argumentu x není opět konstantní. Avšak změna rychlosti růstu funkčních hodnot v závislosti na argumentu je kladná (rychlost růstu funkčních hodnot se zvětšuje)!!!

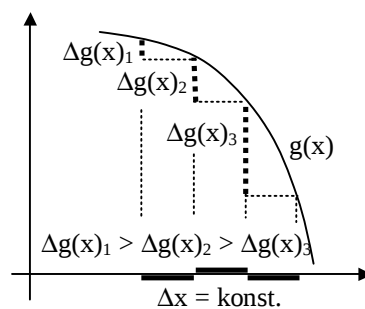


Obrázek I.IV.III.c

Jestliže má daná funkce na nějakém intervalu $I \subset D_h$ vlastní derivace $h'(x)$ a $h''(x)$, pak musí být pro funkci $h(x)$ její derivace $h'(x)$ funkcí rostoucí (s funkčními hodnotami opět většími než nula)!!! Druhá derivace funkce $h(x)$, totiž $h''(x)$, je první derivací derivace $h'(x)$. To znamená, že $h''(x)$ i zde vyjadřuje rychlost změny první derivace $h'(x)$. V tomto případě je $h'(x)$ funkcí rostoucí (viz. výše) a tak musí být $h''(x) > 0$ pro všechny body $x \in I \subset D_h$!!! Funkci $h(x)$ pak nazýváme funkcí ryze konvexní na intervalu $I \subset D_h$.

Zkusme podobným způsobem vyšetřit funkce klesající a vraťme se přitom k označení funkcí g a h a u obou funkcí opět předpokládejme, že jsou spojité. Nejprve se podíváme na funkci $g(x)$, která budiž klesající s tou vlastností, že se rychlost klesání bude spojitě měnit, totiž v absolutní hodnotě bude růst. Vzhledem k tomu, že se jedná o klesající funkci, bude to znamenat, že se její funkční hodnoty budou stále zmenšovat se stále větším tempem!!! Pokles funkčních hodnot tak bude v absolutní hodnotě pořád větší a větší.

Uvědomme si ale, že se jedná o klesající funkci a tak v reálných hodnotách bude přírůstek funkčních hodnot funkce $g(x)$ záporné číslo, která se bude s rostoucím argumentem stále zmenšovat (v absolutní hodnotě pak bude růst)!!! Graf takové funkce $g(x)$ může mít například podobu obrázku I.IV.III.d.

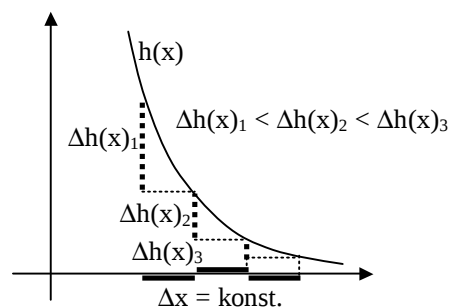


Obrázek I.IV.III.d

Za předpokladu, že má daná funkce na nějakém intervalu $I \subset D_g$ vlastní derivace $g'(x)$ a $g''(x)$, musí být pro funkci $g(x)$ její derivace $g'(x)$ funkcí klesající (s funkčními hodnotami tentokrát menšími než nula)!!! Druhá derivace funkce $g(x)$, totiž $g''(x)$, je první derivací derivace $g'(x)$. To znamená, že $g''(x)$ opět vyjadřuje rychlost změny první derivace $g'(x)$. Ovšem zde je $g'(x)$ klesající (viz. výše) a tak musí být $g''(x) < 0$ pro všechny body $x \in I \subset D_g$!!! Funkci $g(x)$ pak musíme nazvat funkcí ryze konkávní na intervalu $I \subset D_g$.

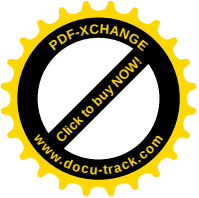
Nyní mějme funkci $h(x)$, která budiž klesající s tou vlastností, že se rychlost klesání bude spojitě měnit, totiž v absolutní hodnotě bude klesat. Vzhledem k tomu, že se jedná o klesající funkci, bude to znamenat, že se její funkční hodnoty budou stále zmenšovat se stále menším tempem!!! Pokles funkčních hodnot tak bude v absolutní hodnotě pořád menší a menší.

Jedná se o klesající funkci a tak v reálných hodnotách bude přírůstek funkčních hodnot funkce $h(x)$ záporné číslo, která se bude s rostoucím argumentem stále zvětšovat (v absolutní hodnotě se pak bude zmenšovat)!!! Graf takové funkce $h(x)$ může mít například podobu obrázku I.IV.III.e.



Obrázek I.IV.III.e

Pokud má daná funkce na nějakém intervalu $I \subset D_g$ vlastní derivace $h'(x)$ a $h''(x)$, musí být pro funkci $h(x)$ její derivace $h'(x)$ funkcí rostoucí (s funkčními hodnotami menšími než nula)!!! Druhá derivace funkce $h(x)$, totiž $h''(x)$, je první derivací derivace $h'(x)$. To znamená, že $h''(x)$ vyjadřuje rychlost změny první derivace $h'(x)$. Zde je ale $h'(x)$ rostoucí (viz. výše) a



tak musí být $h''(x) > 0$ pro všechny body $x \in I \subset D_h$!!! Funkci $h(x)$ pak musíme nazvat funkcí ryze konvexní na intervalu $I \subset D_h$.

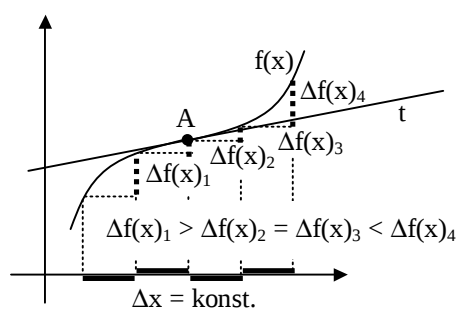
Pokud v úvahách nahradíme libovolný interval $I \subset D_f$ pro nějakou zkoumanou funkci $f(x)$ jejím definičním oborem, pak říkáme, že je tato funkce konkávní, respektive konvexní, na celém svém definičním oboru.

Zopakujme tedy předcházející odstavce této kapitoly. Předpokládejme o funkci $f(x)$, že existuje, že je spojitá v jistém intervalu $I \subset D_f$ respektive v celém svém D_f a že také existují její derivace $f'(x)$ a $f''(x)$ na intervalu $I \subset D_f$ respektive na celém D_f (tj., že je na intervalu $I \subset D_f$, respektive na celém svém D_f diferencovatelná).

Potom říkáme, že funkce $f(x)$ je funkcí ryze konkávní na intervalu $I \subset D_f$, respektive na celém svém D_f právě tehdy, když platí $f''(x) < 0$ pro všechna $x \in I \subset D_f$, respektive pro všechna $x \in D_f$. A dále, že funkce $f(x)$ je funkcí ryze konvexní na intervalu $I \subset D_f$, respektive na celém svém D_f právě tehdy, když platí $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in I \subset D_f$, respektive pro všechna $x \in D_f$.

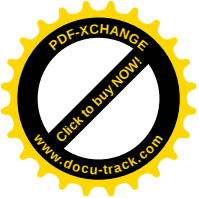
Pokud v definicích nahradíme nerovnost $<$ nerovností $\leq$, pak mluvíme o konkávní funkci na intervalu I respektive na definičním oboru funkce a pokud nahradíme nerovnost $>$ nerovností $\geq$, pak hovoříme o funkci konvexní na intervalu I respektive na definičním oboru funkce.

V bodech, ve kterých konkávní funkce $f(x)$ přechází ve funkci konvexní (a nebo naopak) nastává tzv. inflexe a také body nazýváme inflexními. Jsou to body, v nichž se mění znaménko změny přírůstku funkčních hodnot. V takových bodech je vždy $f''(x) = 0$!!! Situaci znázorňuje obrázek I.IV.III.f. Bod A je bodem inflexe.



Obrázek I.IV.III.f

Podívejme se na situaci blíže. Bodu A necht' odpovídá argument $x_0 \in D_f$ funkce $f(x)$, tedy $A = [x_0; f(x_0)]$. Budeme-li se pohybovat na $P(x_0)$ a je-li funkce na $P(x_0)$ spojitá a existuje její derivace jak první tak druhá v bodě x_0 , potom bude opravdu platit rovnost $\Delta f(x)_2 = f(x_0) - f(x_0 - \delta) = f(x_0 + \delta) - f(x_0) = \Delta f(x)_3$ pro $\delta > 0$ (viz značení v obrázku I.IV.III.f s odvoláním na kapitoly týkající se limit)!!! To ale znamená, že na $P(x_0)$ má sledovaná funkce $f(x)$ konstantní vývoj přírůstku funkčních hodnot v závislosti na argumentu a tak skutečně musí platit pro inflexní bod A rovnost $f''(x_0) = 0$ a obecně pak $f''(x) = 0$!!! Pozor, tato rovnost by však obecně neplatila, kdyby jeden z předpokladů nebyl splněn!!!



Důkazy vět o konkávnosti a konvexnosti funkcí spočívají v aplikaci věty o střední hodnotě funkce. Nebudeme si je zde ukazovat protože by na této úrovni matematiky pro VOŠ zbytečně zatěžovaly text. Jsou provedeny například v učebnici „Úvod do počtu diferenciálního“ od Prof. V. Jarníka, ale i v dalších knihách uvedených v odkazech na konci těchto skript.

Vraťme se k funkci $f: y = \frac{\ln^2 x}{x}$ a vyšetřeme konkávnost a konvexnost této funkce a její inflexní body. Graf funkce je na obrázku I.IV.II.c. Její druhá derivace je:

$$\left[\frac{\ln^2 x}{x} \right]'' = \frac{2\ln^2 x - 6\ln x + 2}{x^3}. \text{ Inflexní bod je bod, v němž platí rovnost } f''(x) = 0. \text{ Je proto}$$

třeba vyřešit rovnici: $\frac{2\ln^2 x - 6\ln x + 2}{x^3} = 0$. Protože se x nesmí rovnat nule (je ve jmenovateli zlomku), musí platit: $2\ln^2 x - 6\ln x + 2 = 0$, což je klasická kvadratická rovnice. Označme nyní $z = \ln x$. Pak dostáváme $2z^2 - 6z + 2 = 0$. Po vyřešení této rovnice a po dosazení zpět do substituce dostáváme $x_1 \approx 1,465$ a $x_2 \approx 13,708$. Funkce má tak dva inflexní body s funkčními hodnotami $f(x_1) \approx 0,100$ a $f(x_2) \approx 0,500$.

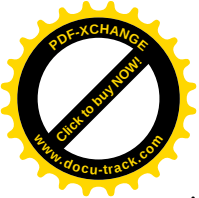
Pro určení intervalů, v nichž je daná funkce konvexní nebo konkávní, je třeba vyřešit dvě nerovnice. Pro ryze konvexní část grafu funkce se jedná o nerovnici $\frac{2\ln^2 x - 6\ln x + 2}{x^3} > 0$ a pro ryze konkávní část je to $\frac{2\ln^2 x - 6\ln x + 2}{x^3} < 0$. Tyto nerovnice

ale budeme řešit na definičním oboru funkce $f(x)$, kterým je množina všech kladných reálných čísel. Proto hodnota x^3 bude vždy kladná a pro nalezení řešení nerovnic nemá valného smyslu. Stačí tedy vzít v úvahu pouze čitatele ve výrazech derivací a řešit postupně tak nerovnice $2\ln^2 x - 6\ln x + 2 > 0$ a $2\ln^2 x - 6\ln x + 2 < 0$.

Řešením obou nerovnic dostáváme intervaly, na nichž je zadaná funkce ryze konkávní: $(1,465; 13,708)$ a ryze konvexní: $(0; 1,465) \cup (13,708; +\infty)$. Pokud připustíme, že krajní body do intervalů patří (vyjma bodu $+\infty$), pak získáme intervaly, na kterých je daná funkce konkávní, respektive konvexní.

I.V Taylorův a Maclaurinův polynom a řada

V praxi se můžeme při studiu funkcí setkat s funkcemi, které mohou být i dosti složité. Chceme-li studovat chování nějaké takové funkce $f(x)$ v okolí libovolného bodu x_0 , bývá v takových případech vhodnější nahradit původní funkci funkcí jednodušší. Takovou



jednodušší funkcí je polynom nejvýše n -tého stupně, tj. $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ (i kdyby se všechny koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ rovnaly nule, stále polynom $P(x)$ budeme nazývat polynomem nejvýše n -tého stupně), kde n je z množiny všech přirozených čísel. Budeme zatím předpokládat, že nahrazovaná funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci až do n -tého řádu (tento předpoklad později rozšíříme)!!!

Koeficienty a_i pro $i = 0, 1, 2, \dots, n$ budeme volit (počítat) tak, aby se polynom $P(x)$ v okolí bodu x_0 co nejlépe přimyká nahrazované funkci $f(x)$.

Konkrétním polynomem $P(x)$ s touto vlastností je pak polynom, kterému říkáme Taylorův a který má následující tvar:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Je však třeba určit, s jakou přesností jsme nahradily funkci $f(x)$ Taylorovým polynomem $P(x)$ v okolí bodu x_0 . To znamená určit rozdíl $f(x) - P(x)$. Právě této chyby se dopustíme, budeme-li nahrazovat funkci $f(x)$ polynomem $P(x)$. Takovou chybu označme R_{n+1} a nebo lépe $R_{n+1}(x)$, neboť i tato chyba bude jistě funkcí argumentu x !!!

Můžeme nyní psát:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x) \text{ a snažíme}$$

se odhadnout (vypočítat, určit) číselnou hodnotu $R_{n+1}(x)$ a proto musíme ještě předpokládat existenci derivace řádu $n + 1$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 . Hodnotě $R_{n+1}(x)$ budeme dále říkat zbytek Taylorova polynomu. Všimněte si ještě, že jsme označení polynomu $P(x)$ na levé straně rovnosti zaměnili za symbol $f(x)$, tedy přímo za nahrazovanou funkci v okolí bodu x_0 !!!

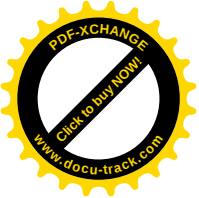
Nejčastěji používaným výrazem pro výpočet zbytku Taylorova polynomu je tzv.

Lagrangeův tvar: $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, kde číslo ξ leží mezi čísly x_0 a x .

Pro číslo ξ budou tady splněny tyto nerovnosti: $0 < x_0 - \xi < x_0 - x$ je-li $x_0 > x$. Z toho po úpravách vyplývá, že $0 < \frac{x_0 - \xi}{x_0 - x} < 1$ a tedy $0 < \frac{\xi - x_0}{x - x_0} < 1$. Bude-li $x > x_0$, pak platí

postupně tyto nerovnosti: $0 < \xi - x_0 < x - x_0$; $0 < \frac{\xi - x_0}{x - x_0} < 1$, což je totéž, jako

v předcházejícím případě!!! Můžeme tedy psát $\Theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0}$ a bude $0 < \Theta < 1$.



Protože platí $\xi = x_0 + \frac{\xi - x_0}{x - x_0}(x - x_0)$ – zkuste v rámci cvičení ukázat – dostáváme pro

výpočet čísla ξ vztah: $\xi = x_0 + \Theta \cdot (x - x_0)$.

V praktických výpočtech se nejčastěji užívá označení $x = x_0 + h$ (s odvoláním na značení v kapitolách týkajících se limit a derivací), kde h je nekonečně malý, ale nenulový, přírůstek argumentu funkce $f(x)$. Potom je $h = x - x_0$ a $\xi = x_0 + \Theta \cdot h$, přičemž platí nerovnost $0 < \Theta < 1$. Po dosazení za x_0 do výrazu pro h dostáváme ještě $x - \xi = (1 - \Theta) \cdot h$.

Při zavedení označení dle předchozího odstavce dostane Taylorův polynom a zbytek $R_{n+1}(x)$ následující tvar:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n + R_{n+1}(x_0 + h), \quad \text{kde zbytek}$$

$$R_{n+1}(x_0 + h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta \cdot h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}. \quad \text{Je třeba si uvědomit, že bod } x_0 + \Theta \cdot h \text{ (v němž}$$

počítáme $(n+1)$ -ní derivaci funkce $f(x)$) leží mezi body x_0 a $x = x_0 + h$.

Podívejme se, jak se změní Taylorův polynom ve chvíli, kdy budeme nahrazovat funkci $f(x)$ v počátku, tj. $x_0 = 0$. Protože $h = x - x_0$ bude platit rovnost $h = x$. Po dosazení

dostáváme: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + R_{n+1}(x)$ a zbytek počítáme

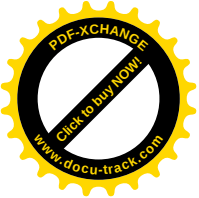
$$\text{z výrazu: } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta \cdot x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

Takto upravené tvary Taylorova polynomu a jeho zbytku mají v praxi významnou úlohu a velmi často se vyskytují. Proto se v matematice zavádí jejich speciální samostatné pojmenování a říkáme jim Maclaurinův polynom a zbytek Maclaurinova polynomu.

Taylorův, respektive Maclaurinův, polynom nejvýše n -tého stupně má tu vlastnost, že číslo n neroste nade všechny meze, není nekonečné. Pokud ale toto omezení odstraníme, totiž připustíme, že číslo n poroste nade všechny meze, pak můžeme psát toto:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots. \quad \text{Tato rovnost bude}$$

ale splněna jen tehdy, bude-li $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$!!! Předcházející vzorec, respektive pravá strana této rovnosti, definuje nikoli Taylorův polynom, nýbrž Taylorovu nekonečnou řadu pro funkci $f(x)$!!!



Opět speciálním případem bude situace, kdy $x_0 = 0$. Potom Taylorova nekonečná řada bude mít tvar: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + L$ a tato rovnost bude platit právě tehdy, když $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$. Pravou stranu předcházející rovnosti nazýváme Maclaurinovou nekonečnou řadou pro funkci $f(x)$.

Na několika následujících příkladech si ukážeme použití jak Taylorova polynomu tak i polynomu Maclaurinova.

Zkusme nahradit funkci $f: y = e^x$ Taylorovým polynomem nejvýše n -tého stupně. Vzhledem k tomu, že funkce $f(x)$ má definovány derivace všech řádů pro všechna x , můžeme s výhodou využít Maclaurinův polynom, tj. Taylorův polynom pro $x_0 = 0$. Užití Taylorova polynomu pro obecnou hodnotu x_0 by ztrácelo smyslu, protože bychom stejně museli počítat e^x pro $x = x_0$ a tomu se právě chceme vyhnout!!! V tuto chvíli budeme tedy předpokládat blízké okolí počátku, nicméně za chvíli tento případ zobecníme pro libovolné x .

Platí $f(0) = e^0 = 1$; $f^{(k)}(x) = e^x$; $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$; $f^{(k)}(\Theta x) = e^{\Theta x}$ pro každé $k \geq 0$. Potom užitím Maclaurinova polynomu a jeho zbytku $R_{n+1}(x)$ dostáváme pro funkci $f: y = e^x$ toto: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + L + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\Theta x}$, kde $\Theta \in (0; 1)$. Tímto polynomem stupně nejvýše n -tého nahradíme funkci e^x s jistou chybou, kterou určuje zbytek polynomu (poslední výraz v předcházející rovnosti). Naším úkolem bude nyní odhadnout velikost tohoto zbytku.

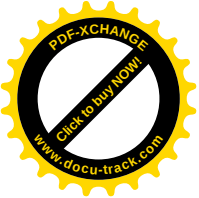
Úlohu rozdělíme na dvě části. V první budeme předpokládat, že $x \in (0; 1)$. Protože je $\Theta \in (0; 1)$, bude také součin $\Theta \cdot x < 1$. Proto $e^{\Theta x} < e^1$ a navíc víme, že $e < 3$ (důkaz naleznete v učebnici Prof. V. Jarníka „Úvod do počtu diferenciálního“, kapitola II., § 4, příklad 3). Proto platí nerovnosti $e^{\Theta x} < e^1 = e < 3$. Pro zbytek Maclaurinova polynomu pro funkci e^x tak

platí: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\Theta x} < \frac{3x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$. Bude-li tedy $x \in (0; 1)$ a nahradíme-li funkci e^x

polynomem $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + L + \frac{x^n}{n!}$, dopustíme se chyby ne větší, než $\frac{3x^{n+1}}{(n+1)!}$. O to jistěji pak

chyby ne větší než $\frac{3}{(n+1)!}$.

Uvažujme nyní za druhé $x \in (-1; 0)$. Pak bude dokonce součin $\Theta \cdot x < 0$ a $e^{\Theta x} < e^0 = 1$. Pro zbytek Maclaurinova polynomu budou tak platit tyto nerovnosti:



$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\Theta x} \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Takže pro takáto x bude výpočet pomocí Maclaurinova polynomu při stejném stupni ještě přesnější!!!

Zkusme nyní na základě předcházejících rozborů vypočítat hodnotu funkce $f: y = e^x$ pro $x = -0,5$ s přesností lepší než 10^{-6} .

Pro nalezení číselné hodnoty e^x podle zadání je stěžejní určit maximální stupeň n Maclaurinova polynomu, kterým budeme danou funkci nahrazovat a pomocí něhož budeme pak počítat náhradní hodnotu této funkce. Pro zbytek podle zadání musí platit tato nerovnost:

$\frac{3x^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6}$. Protože $x = -0,5$, řešíme tuto nerovnost v neznámé n . Takže dostáváme

postupně: $\frac{3 \cdot 0,5^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-6}$; $3000000 < \frac{(n+1)!}{0,5^{n+1}}$. Nerovnice je splněna pro $n \geq 7$. Stačí nám

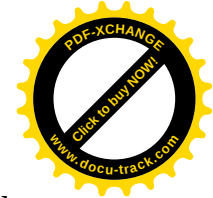
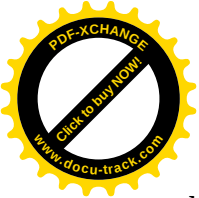
proto vzít prvních 8 členů (včetně nultého, kterým je číslo 1) Maclaurinova polynomu pro funkci e^x . Pilný student jistě výpočtem ověří, že tomu tak skutečně je.

Hodnoty Maclaurinova polynomu pro funkce e^x , kde $|x| > 1$ je možné počítat uvědomíme-li si, že například $e^{2,5} = e \cdot e \cdot e^{0,5}$!!! Takto můžeme nahradit s jistou přesností hodnotu funkce e^x hodnotou Maclaurinova polynomu nejvýše n -tého stupně pro libovolné $x \neq 0$.

Podívejme se nyní na zbytek Maclaurinova polynomu pro funkci $f: y = e^x$. Jedná se o výraz $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\Theta x}$. Vyšetříme nyní $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\Theta x}$. Připomeňme ještě, že $\Theta \in (0; 1)$ a $|x| \leq 1$, $x \neq 0$. Vůči vyšetřované limitě je výraz $e^{\Theta x}$ pro dané x a zvolené Θ konstantou. Dále limita čitatele je pro $n \rightarrow \infty$ rovna nule (x je v absolutní hodnotě menší než jedna) a limita jmenovatele je pak pro $n \rightarrow \infty$ rovna ∞ . Je proto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\Theta x} = 0$. To je podmínka nutná a také postačující pro to, abychom mohli psát:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ a to beze zbytku. Jedná se o Maclaurinovu nekonečnou řadu pro funkci $f: y = e^x$, kde již není x omezeno intervalem, ale $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Poslední poznámkou k tomuto příkladu je, že jsme až doposud neuvažovali případ, kdy $x = 0$. Je zřejmé, že všechny úvahy platí i pro tuto možnost. Nicméně provádět výpočty hodnoty e^x pro $x = 0$ pomocí Maclaurinova nebo Taylorova polynomu je totéž, jako si vzít na



komára kladivo. Hodnota e^x pro $x = 0$ je identicky rovna jedné a jde se vlastně o případ, kdy $x = x_0 = 0$ při přechodu Taylorova polynomu na Maclaurinův polynom!!!

Podívejme se ještě na funkci $f: y = \ln x$. Pro tuto funkci nebude zřejmě Maclaurinův polynom definován, protože definiční obor logaritmické funkce jsou všechna kladná reálná čísla, tedy nikoliv včetně nuly!!! Musíme si proto trochu pomoci. Uvažujme nyní podobnou funkci, totiž $g: y = \ln(x + 1)$. Definičním oborem bude pak množina $D_g = (-1; \infty)$ nebude problémem Maclaurinův polynom pro tuto funkci nalézt (mějme stále na paměti, že pro Maclaurinův polynom platí $x_0 = 0$).

Bude $g(x_0) = g(0) = 0$. Derivace funkce g , které budeme potřebovat, budou postupně vypadat takto:

$$g' = \frac{1}{x+1}; \quad g'' = -\frac{1}{(x+1)^2}; \quad g''' = \frac{2}{(x+1)^3}; \quad g^{(4)} = -\frac{6}{(x+1)^4};$$

$$g^{(5)} = \frac{24}{(x+1)^5}; \dots; g^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}; \quad g^{(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Maclaurinův polynom stupně nejvýše n bude pak vypadat takto ($x_0 = 0$):

$$\ln(x+1) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{2}{3!} \cdot x^3 - \frac{6}{4!} \cdot x^4 + K + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} \cdot x^n + R_{n+1}(\Theta x), \text{ kde výraz pro}$$

$$\text{zbytek Maclaurinova polynomu bude: } R_{n+1}(\Theta x) = \frac{n! \cdot x^{n+1}}{(n+1)!(1+\Theta x)^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}},$$

přičemž opět $\Theta \in (0; 1)$ a $x \in (-1; 1)$.

Po vykrácení a jednoduché úpravě dostane Maclaurinův polynom pro zadanou funkci

$$\text{tento tvar: } \ln(x+1) = 0 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + K + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_{n+1}(\Theta x).$$

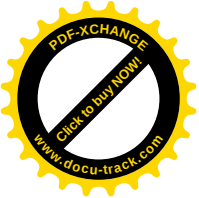
Zbývá ještě udělat odhad chyby, které se dopustíme nahrazením funkce g Maclaurinovým polynomem stupně nejvýše n -tého. Tato chyba je dána zbytkem polynomu.

Opět rozdělíme řešení na dvě možnosti. První bude pro $x \in (0; 1)$. V tomto případě je $(1 + \Theta x) > 1$ a proto pro zbytek $R_{n+1}(\Theta x)$ bude platit následující nerovnost (absolutní hodnotu použijeme pro odstranění mocnin čísla -1):

$$R_{n+1}(\Theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}} < \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} \text{ (poslední nerovnost je pro případ, kdy } x = 1).$$

Podívejme se ještě na podmínku existence Maclaurinovy nekonečné řady, totiž:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ a tím spíše pak bude } \lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(\Theta x)| = 0 !!!$$



Druhou možností je případ, kdy $x \in (-1; 0)$. Potom bude $1 + \Theta x < 1$. Je zřejmé, že výraz pro $R_{n+1}(\Theta x)$, který jsme až doposud používali, není vhodný pro následující úvahy. Je třeba jej nahradit jiným, vhodnějším. Jedná se o tento tvar:

$$R_{n+1}(\Theta x) = \frac{(1-\Theta)^n \cdot g^{(n+1)}(\Theta x)}{n!} \cdot x^{n+1} \quad \text{a po dosazení derivace} \quad |R_{n+1}(\Theta x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1+\Theta x} \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x} \right)^n$$

(viz. „Úvod do počtu diferenciálního“ Prof. V. Jarníka, str. 330, vzorec 14).

Položme nyní $y = -x$ a tedy $x = -y$, přičemž $y \in (0; 1)$. Potom bude platit: $1 - \Theta > 0$; dále $1 + \Theta x = 1 - \Theta y > 1 - y > 0$ a také $1 + \Theta x = 1 - \Theta y > 1 - \Theta > 0$

(platí $\Theta \cdot y < y$). Proto musí být $0 < \frac{1-\Theta}{1+\Theta x} < 1$ (kromě toho také platí důležitá nerovnost

$\Theta > \Theta \cdot |x|$). Dále je $|x|^{n+1} = (-x)^{n+1} = y^{n+1}$ (to vyplývá ze zavedené substituce, přičemž x je záporné!!!). Pro zbytek Maclaurinova polynomu po substituci bude nakonec platit:

$$R_{n+1}(\Theta y) = \frac{y^{n+1}}{1-\Theta y} \left(\frac{1-\Theta}{1-\Theta y} \right)^n \leq \frac{y^{n+1}}{1-y}. \quad \text{Kromě toho také je} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y^{n+1}}{1-y} = 0 \quad (\text{mějme stále na}$$

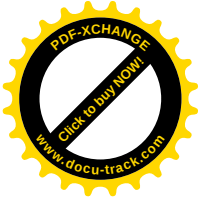
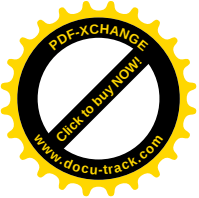
paměti, že $y \in (0; 1)$). V intervalu $x \in (-1; 0)$ bude tím pádem možné nahradit funkci $g: y = \ln(x + 1)$ Maclaurinovou nekonečnou řadou.

Ale pozor, pro všechna x , která splňují nerovnost $|x| > 1$ je Maclaurinova nekonečná řada divergentní a tedy nelze pro náhradu funkce $g(x)$ použít. Není totiž splněno d'Alambertovo kritérium konvergence nekonečných řad (viz. „Úvod do počtu diferenciálního“ Prof. V. Jarníka, str. 136, věta 86 nebo též „Diferenciální počet I“ autorů Jankovského a Průchy, str. 30, věta 3.13.).

Zkusíme vypočítat hodnotu funkce $g: y = \ln(x + 1)$ jednak v bodě $x_1 = -0,5$ a $x_2 = 0,5$ s přesností lepší než 10^{-4} . Maclaurinův polynom nejvýše n -tého stupně pro tuto má již jasný tvar (viz. výše). Nyní je třeba určit právě stupeň tohoto polynomu. Nejprve vyšetříme první případ. Z výše vyvozeného pro funkci $g(x)$ je zřejmé, že musí být splněna tato

$$\text{nerovnost: } R_{n+1}(\Theta y) = \frac{y^{n+1}}{1-\Theta y} \left(\frac{1-\Theta}{1-\Theta y} \right)^n \leq \frac{y^{n+1}}{1-y} < 10^{-4}. \quad \text{Položme nyní } y = -x_1 = 0,5. \quad \text{Řešením}$$

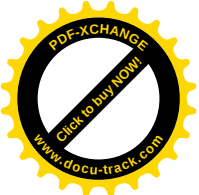
této exponenciální rovnice (pomocí jednoduchých úprav a logaritmování) nad tělesem všech přirozených čísel je $n = \{n \in \mathbb{N}; n > 13\}$. V našem případě vezmeme nejmenší hodnotu n , která nám vyhovuje a tou je $n = 14$. Pilný student dosazením do Maclaurinova polynomu hledanou funkční hodnotu funkce $g(x)$ pro $x_1 = -0,5$ hladce vypočte.



Podívejme se na druhý případ, tedy $x_2 = 0,5$. Podle zadání má být splněna tato nerovnost: $R_{n+1}(\Theta x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}} < \frac{x^{n+1}}{n+1} < 10^{-4}$. Řešením této nerovnice dostáváme

$n = \{n \in \mathbb{N}; n > 8\}$ a opět vezmeme nejmenší hodnotu n , která vyhovuje nerovnici, tedy $n = 9$. Nechávám na studentovi dopočítat funkční hodnotu funkce $g(x)$ v bodě $x_2 = 0,5$ pomocí Maclaurinova polynomu stupně nejvýše devátého.

A ještě malá poznámka nakonec. Z vlastností logaritmické funkce je patrné, že je citlivější na změnu argumentu při levém okraji definičního oboru a naopak méně citlivá směrem k $+\infty$. Proto také při stejné požadované přesnosti je třeba v případě bodu $x_1 = -0,5$ počítat s více členy Maclaurinova polynomu než je tomu pro bod $x_2 = 0,5$. V prvním případě musíme vzít o pět členů rozvoje více než v případě druhém!!!



II Úvod do integrálního počtu funkcí jedné proměnné